Boletín de la SOCIEDAD MATEMÁTICA MEXICANA

Tercera Serie
Volumen 10
Número 2
Octubre de 2004

Contenido

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

Continúa/Continued on back cover

SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA

Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) Vol. 10, 2004

AUSLANDER-REITEN DUALITY FOR ABELIAN CATEGORIES

HELMUT LENZING AND RITA ZUAZUA

ABSTRACT. For a commutative artinian ring k, we give an elementary account of the fact that an Ext-finite abelian k-category $\mathcal{C}$ has almost-split sequences if and only if it satisfies Auslander-Reiten duality

$$\overline{\mathrm{Hom}}(Y, \tau X) \cong \mathrm{D}\mathrm{Ext}^1(X, Y) \cong \underline{\mathrm{Hom}}(\tau^- Y, X),$$

where τ and τ^- denote the Auslander-Reiten translation functors between the projectively, respectively injectively, stable categories associated with $\mathcal{C}$, and D refers to Matlis duality for finitely generated k-modules. This complements a corresponding result of Reiten and van den Bergh [11] on Serre duality, valid for triangulated categories, and a result of Gabriel and Roiter [4], Theorem 9.3 and Corollary 9.4.

1. Statement of the main result

Throughout the paper k denotes a commutative artinian ring, if not specified otherwise. Let $\mathcal{C}$ be an abelian k-category. We assume that $\mathcal{C}$ is Ext-finite; that is, all morphism and extension modules $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ and $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}}(X, Y)$ have finite length over k. The concept of a k-category further requires that composition of morphisms in $\mathcal{C}$ be k-bilinear. We do not assume the existence of sufficiently many projectives or injectives, hence the extension modules $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $n > 0$, are defined in Yoneda's sense as equivalence classes of exact sequences; see for instance [10]. We recall that a category is called *skeletally small* if its isomorphism classes of objects forms a set.

Let $\check{k}$ denote the injective cogenerator for k, that is, the injective envelope of a direct sum of (a representative system of) the simple k-modules. Matlis duality then yields a self-duality $D = \mathrm{Hom}_k(-, \check{k})$ of the category of finitely generated k-modules. We now state our main result.

THEOREM (1.1). *Let $\mathcal{C}$ be a skeletally small abelian k-category which is Ext-finite. Then $\mathcal{C}$ has almost-split sequences if and only if Auslander-Reiten duality*

$$\overline{\mathrm{Hom}}(Y, \tau X) \xrightarrow{\psi_{X,Y}} \mathrm{D}\mathrm{Ext}^1(X, Y) \xleftarrow{\varphi_{X,Y}} \underline{\mathrm{Hom}}(\tau^- Y, X)$$

holds with natural isomorphisms $\varphi_{X,Y}$ and $\psi_{X,Y}$ which are functorial in X and Y.

Moreover, there is a unique possibility, compatible with the above isomorphisms, to turn the Auslander-Reiten translation $\tau : \underline{\mathcal{C}} \to \overline{\mathcal{C}}$, similarly $\tau^- : \overline{\mathcal{C}} \to \underline{\mathcal{C}}$, into a k-linear functor from the projectively stable to the injectively stable category associated with $\mathcal{C}$. The functors τ and τ^- are then equivalences, inverse to each other.

2000 *Mathematics Subject Classification*: Primary 16G70; Secondary 18E10, 14F05.
Keywords and phrases: Auslander-Reiten duality, Auslander-Reiten formula, almost-split sequences, Serre duality.

Additionally, we provide an explicit description of the isomorphisms φ and ψ in terms of almost-split sequences. The proof of the theorem follows directly from Propositions (3.1), (3.3) and (4.1) below.

The authors wish to thank the referees for helpful comments, in particular for suggesting to work over an artinian ring instead of a field k. We also thank R. Bautista directing our attention to the treatment of Proposition (3.1) in [4].

2. A few generalities

We now define the projectively, respectively injectively, stable category associated with $\mathcal{C}$. A morphism $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ is called *projectively trivial* if for each $Z \in \mathcal{C}$, the induced map $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(f, Z) : \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(Y, Z) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(X, Z)$ is the zero map. Dually, a morphism $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ is called *injectively trivial* if for each object $Z \in \mathcal{C}$, the induced map $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(Z, f) : \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(Z, X) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(Z, Y)$ is the zero map.

In the following it is convenient to write ηf for the pullback $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(f, Z)(\eta)$ of η along f, respectively $f\lambda$ for the pushout $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(Z, f)(\lambda)$ of λ along f. This notation is essential for the formalism of Section 3 and actually denotes the composition in the derived category of $\mathcal{C}$.

We denote by $P_t(X, Y)$ (resp. $I_t(X, Y)$) the subspace consisting of all maps $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ such that f is projectively trivial (resp. injectively trivial). The *projectively stable category* $\underline{\mathcal{C}}$ attached to $\mathcal{C}$ is the k-category having the same objects as $\mathcal{C}$, but morphisms given by $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathcal{C}}}(X, Y) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(X, Y) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)/P_t(X, Y)$ and the composition induced by $\mathcal{C}$. Dually the *injectively stable category* $\overline{\mathcal{C}}$ has morphisms

$$\mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(X, Y) = \overline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)/I_t(X, Y).$$

We recall that in the present context, an object $P \in \mathcal{C}$ is projective if and only if $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(P, -) = 0$, equivalently if each short exact sequence $0 \to A \to B \to P \to 0$ in $\mathcal{C}$ splits. We also note that an object P from $\mathcal{C}$ becomes zero in $\underline{\mathcal{C}}$ if and only if P is projective in $\mathcal{C}$: if P is projective, then the identity 1_P on P is projectively trivial and hence $P = 0$ in $\underline{\mathcal{C}}$. Assume conversely that an object P from $\mathcal{C}$ becomes zero in $\underline{\mathcal{C}}$. Then 1_P is projectively trivial and hence the identity map $\mathrm{Ext}^1(1_P, Z)$ on $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(P, Z)$ becomes zero for all $Z \in \mathcal{C}$; thus P is projective.

LEMMA (2.1). *A morphism $f : X \to Y$ is projectively trivial if and only if for each epimorphism $g : E \to Y$ the morphism f lifts with respect to g.*

Proof. Assuming f to be projectively trivial, we apply $\mathrm{Hom}(X, -)$ to the exact sequence $\eta : 0 \to K \to E \xrightarrow{g} Y \to 0$ yielding exactness of $\mathrm{Hom}(X, E) \xrightarrow{g\circ -} \mathrm{Hom}(X, Y) \xrightarrow{\eta\circ -} \mathrm{Ext}^1(X, K)$. By assumption $\eta f = 0$, hence there exists $h : X \to E$ with $gh = f$. Conversely, assume that f satisfies the lifting property above. For $\eta \in \mathrm{Ext}^1(Y, Z)$ we form the pull-back

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\eta & : & 0 & \to & Z & \to & E & \xrightarrow{g} & Y & \to & 0 \\
 & & & & \| & & \uparrow & & \uparrow f & & \\
\eta f & : & 0 & \to & Z & \to & E' & \to & X & \to & 0
\end{array}$$

along f. By hypothesis, f lifts to E via g, hence—in view of the homotopy lemma—the identity morphism on Z extends to E', and ηf splits. □

Clearly, each morphism factoring through a projective object is projectively trivial. The converse holds if $\mathcal{C}$ has *sufficiently many projectives*, that is, for each $X \in \mathcal{C}$ there is an epimorphism $f : P \to X$ with P projective in $\mathcal{C}$.

LEMMA (2.2). *If the category $\mathcal{C}$ has sufficiently many projectives, then a morphism $f : X \to Y$ is projectively trivial if and only if f factors through a projective object.* □

3. Duality derived from almost-split sequences

As before we assume that $\mathcal{C}$ is an abelian Ext-finite k-category where k is artinian. If, moreover, $\mathcal{C}$ is connected we may assume that k is additionally local. The setting implies that each object X of $\mathcal{C}$ decomposes into a finite direct sum $X = \bigoplus_{i=1}^{n} X_i$ of indecomposable objects X_i, all having local endomorphism rings. As a consequence the above decomposition is unique up to reordering and isomorphy of summands. We recall that a non-split short exact sequence $0 \to A \to B \to C \to 0$ is *almost-split* if its end terms A and C are indecomposable and, moreover, each non-isomorphism $f : X \to C$, with X indecomposable, lifts to B; equivalently, each non-isomorphism $g : A \to Y$, with Y indecomposable, extends to B.

In this paper we say that $\mathcal{C}$ *has almost-split sequences* if for each indecomposable $C \in \mathcal{C}$, C non-projective, there is an almost-split sequence $0 \to \tau C \to X \to C \to 0$ ending in C, and for each indecomposable $D \in \mathcal{C}$, D non-injective, there is an almost-split sequence $0 \to D \to Y \to \tau^{-} D \to 0$ starting in D. We are not making any assumptions about the existence of right (resp. left) almost split maps ending in projectives (resp. starting in injectives). We refer to [2] and [1] for the general properties of almost-split maps and sequences. Here, we only note that τC and $\tau^{-} D$ are—up to isomorphism—uniquely determined by C, respectively D.

Without loss of generality we can assume that $\mathcal{C}$ is a *skeleton*, that is, each isomorphism class for $\mathcal{C}$ contains a single object. Assuming further that $\mathcal{C}$ is small, uniqueness of the decomposition into indecomposable objects causes the Auslander-Reiten translations to extend to maps $\tau : \mathrm{obj}(\underline{\mathcal{C}}) \to \mathrm{obj}(\overline{\mathcal{C}})$ and $\tau^{-} : \mathrm{obj}(\overline{\mathcal{C}}) \to \mathrm{obj}(\underline{\mathcal{C}})$ on the respective sets of objects which are inverse to each other.

Assuming that $\mathcal{C}$ has almost-split sequences, for each indecomposable non-projective X in $\mathcal{C}$, we fix an almost-split sequence $\mu_X : 0 \to \tau X \to F \to X \to 0$ and a k-linear map $\kappa_X : \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(X, \tau X) \to \check{k}$ such that $\kappa_X(\mu_X) \neq 0$. For the proposition to follow, where Y is indecomposable non-injective, it is convenient to use accordingly $\mu_{\tau^- Y} : 0 \to Y \to E \to \tau^- Y \to 0$ in $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(\tau^- Y, Y)$, and $\kappa_{\tau^- Y} : \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(\tau^- Y, Y) \to \check{k}$. Note further that to establish the equivalences φ and ψ we may restrict to indecomposable objects.

Let E and F be k-modules of finite length. We say that a k-bilinear map $\langle -, - \rangle : E \times F \to \check{k}$ is a *perfect pairing* if for each non-zero e from E there exists f from F with $\langle e, f \rangle \neq 0$, and similarly for each non-zero f from F there exists e from E with $\langle e, f \rangle \neq 0$. Since D is length-preserving, a perfect pairing induces isomorphisms $E \to \mathrm{D}F$, $e \mapsto \langle e, -\rangle$, and $F \to \mathrm{D}E$, $f \mapsto \langle -, f\rangle$. For the next proposition compare [4], Theorem 9.3 and Corollary 9.4.

PROPOSITION (3.1). *We assume that $\mathcal{C}$ is a skeletally small, Ext-finite, abelian category which has almost-split sequences. For a fixed indecomposable non-injective object Y of $\mathcal{C}$ the k–bilinear map*

$$\langle - \,|\, - \rangle : \mathrm{Ext}^1(X, Y) \times \underline{\mathrm{Hom}}(\tau^- Y, X) \to \check{k}, \quad (\eta, \underline{u}) \mapsto \kappa_{\tau^- Y}(\eta u),$$

defines a perfect pairing which induces natural isomorphisms

$$\varphi_{X,Y} : \underline{\mathrm{Hom}}(\tau^- Y, X) \to \mathrm{D}\mathrm{Ext}^1(X, Y), \quad \underline{u} \mapsto \langle - \,|\, \underline{u}\rangle\,,$$

functorial in $X \in \mathcal{C}$.

Proof. We need to show that for a given $0 \neq \eta \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(X, Y)$ there exists $\underline{u} : \tau^- Y \to X$ in $\underline{\mathcal{C}}$ such that $\langle \eta \,|\, \underline{u}\rangle \neq 0$ and, likewise, for a given $0 \neq \underline{u} \in \underline{\mathrm{Hom}}(\tau^- Y, X)$ there exists $\eta \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(X, Y)$ such that $\langle \eta \,|\, \underline{u}\rangle \neq 0$.

Assume first that $\eta \in \mathrm{Ext}^1(X, Y)$ is non-split. Since $\mu = \mu_{\tau^- Y}$ is almost-split, we obtain a commutative diagram

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mu & : & 0 & \to & Y & \to & E & \to & \tau^- Y & \to & 0 \\
 & & & & \| & & \downarrow & & \downarrow u & & \\
\eta & : & 0 & \to & Y & \to & E' & \to & X & \to & 0,
\end{array}$$

which is a pull-back. Hence $\mu = \eta u$ and $\langle \eta \,|\, \underline{u}\rangle = \kappa_{\tau^- Y}(\mu) \neq 0$.

Next we assume we are given some $0 \neq \underline{u} \in \underline{\mathrm{Hom}}(\tau^- Y, X)$. By assumption any morphism $u : \tau^- Y \to X$ representing $\underline{u}$ is not projectively trivial, and there exists $Z \in \mathcal{C}$ such that $\mathrm{Ext}^1(u, Z) \neq 0$. We thus find $\lambda \in \mathrm{Ext}^1(X, Z)$ with $0 \neq \mathrm{Ext}^1(u, Z)(\lambda) = \lambda u \in \mathrm{Ext}^1(\tau^- Y, Z)$. Using that $\mu = \mu_{\tau^- Y}$ is almost-split, we hence obtain a commutative diagram

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\lambda u & : & 0 & \to & Z & \to & E' & \to & \tau^- Y & \to & 0 \\
 & & & & \downarrow v & & \downarrow & & \| & & \\
\mu & : & 0 & \to & Y & \to & E & \to & \tau^- Y & \to & 0,
\end{array}$$

which is a push-out and hence $\mu = v(\lambda u) = (v\lambda)u$. Setting $\eta = v\lambda \in \mathrm{Ext}^1(X, Y)$ we get $0 \neq \kappa_{\tau^- Y}(\mu) = \kappa_{\tau^- Y}(\eta u) = \langle \eta \,|\, \underline{u}\rangle$, as claimed. □

Similarly for a fixed indecomposable object X of $\mathcal{C}$, we consider the selected almost-split sequence $\mu_X : 0 \to \tau X \to F \to X \to 0$ and k–linear map $\kappa_X : \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(X, \tau X) \to \check{k}$ such that $\kappa_X(\mu_X) \neq 0$. This yields a perfect pairing

$$\langle - \,|\, - \rangle : \overline{\mathrm{Hom}}(Y, \tau X) \times \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \check{k}, \quad (\overline{v}, \eta) \mapsto \kappa_X(v\eta),$$

inducing natural isomorphisms

$$\psi_{X,Y} : \overline{\mathrm{Hom}}(Y, \tau X) \to \mathrm{D}\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(X, Y), \quad \overline{v} \mapsto \langle \overline{v} \,|\, - \rangle$$

which are functorial in Y.

LEMMA (3.2). *Given $\underline{u} \in \underline{\mathrm{Hom}}(\tau^- Y, X)$ there is a unique $\tau\underline{u} \in \overline{\mathrm{Hom}}(Y, \tau X)$ such that*

$$\langle \tau\underline{u} \,|\, \eta\rangle = \langle \eta \,|\, \underline{u}\rangle$$

for all $\eta \in \operatorname{Ext}^1(X, Y)$. *Moreover, we have*

$$\langle \eta \,|\, \underline{u}_2 \underline{u}_1 \rangle = \langle \eta u_2 \,|\, \underline{u}_1 \rangle\,, \quad \langle \overline{v}_2 \overline{v}_1 \,|\, \eta \rangle = \langle \overline{v}_2 \,|\, v_1 \eta \rangle\,, \quad \langle v\eta \,|\, \underline{u} \rangle = \langle \overline{v} \,|\, \eta u \rangle$$

whenever one of the six expressions makes sense.

Proof. We define the action of τ by means of the commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} \overline{\operatorname{Hom}}(Y, \tau X) & & \\ & \searrow \psi_{X,Y} & \\ \cong\uparrow \tau & & \operatorname{DExt}^1(X, Y). \\ & \nearrow \varphi_{X,Y} & \\ \underline{\operatorname{Hom}}(\tau^- Y, X) & & \end{array}$$

Uniqueness then follows from perfectness of pairings, establishing the first claim. The second claim follows directly from the definitions. □

PROPOSITION (3.3). *With the action on morphisms, given by Lemma (3.2),* τ *is a functor, actually yielding an equivalence* $\tau : \underline{\mathcal{C}} \to \overline{\mathcal{C}}$ *of categories.*

Proof. We only have to show that τ is a functor. Lemma (3.2) yields the identities

$$\begin{aligned} \langle \tau(\underline{u}_2)\tau(\underline{u}_1) \,|\, \eta \rangle &= \langle \tau(\underline{u}_2) \,|\, \tau(\underline{u}_1)\eta \rangle \\ &= \langle \tau(\underline{u}_1)\eta \,|\, \underline{u}_2 \rangle \\ &= \langle \tau(\underline{u}_1) \,|\, \eta \underline{u}_2 \rangle \\ &= \langle \eta \underline{u}_2 \,|\, \underline{u}_1 \rangle \\ &= \langle \eta \,|\, \underline{u}_2 \underline{u}_1 \rangle \\ &= \langle \tau(\underline{u}_2 \underline{u}_1) \,|\, \eta \rangle \end{aligned}$$

for each $\eta \in \operatorname{Ext}^1(X, Y)$, and hence functoriality $\tau(\underline{u}_2\underline{u}_1) = \tau(\underline{u}_2)\tau(\underline{u}_1)$. □

4. Almost-split sequences derived from duality

It is well-known, at least for module categories, that Auslander-Reiten duality

$$\overline{\operatorname{Hom}}(Y, \tau X) \cong \operatorname{DExt}^1(X, Y) \cong \underline{\operatorname{Hom}}(\tau^- Y, X)$$

implies the existence of almost-split sequences, see for instance [8], section 1.4. The following argument yields a more explicit description. In this section $\mathcal{C}$ denotes an Ext-finite abelian k-category with k artinian.

PROPOSITION (4.1). *Assume* X *and* τX *are indecomposable objects of* $\mathcal{C}$ *such that* X *is non-projective and* $\psi : \overline{\operatorname{Hom}}_{\mathcal{C}}(-, \tau X) \to \operatorname{DExt}^1_{\mathcal{C}}(X, -)$ *is an isomorphism of functors. Then there exists an almost-split sequence* $0 \to \tau X \to F \to X \to 0$.

Dually, assume Y *and* $\tau^- Y$ *are indecomposable objects of* $\mathcal{C}$ *such that* Y *is non-injective and* $\varphi : \underline{\operatorname{Hom}}_{\mathcal{C}}(\tau^- Y, -) \to \operatorname{DExt}^1_{\mathcal{C}}(-, Y)$ *is an isomorphism of functors. Then there exists an almost-split sequence* $0 \to Y \to E \to \tau^- Y \to 0$.

Proof. By duality, we only need to deal with the first part. By Yoneda's lemma, the morphism $\psi : \overline{\operatorname{Hom}}(-, \tau X) \to \operatorname{DExt}^1(X, -)$ yields a k-linear map κ_X from $\operatorname{Ext}^1(X, \tau X)$ to $\check{k}$, such that $\psi_Y(\overline{v})(\eta) = \kappa_X(v\eta)$ holds for all $v \in \operatorname{Hom}(Y, \tau X)$

and $\eta \in \operatorname{Ext}^1(X, Y)$. Since ψ is an isomorphism, we obtain therefore for each $Y \in \mathcal{C}$ a perfect pairing

$$\langle - \mid - \rangle : \overline{\operatorname{Hom}}(Y, \tau X) \times \operatorname{Ext}^1(X, Y) \longrightarrow \check{k}, \quad (\bar{v}, \eta) \mapsto \kappa_X(v\eta).$$

In order to derive from this setting an almost-split sequence $\mu_X \in \operatorname{Ext}^1(X, \tau X)$ it is not sufficient to choose $\mu_X \neq 0$ such that $\kappa_X(\mu_X) \neq 0$. A more sophisticated construction is needed.

Since X is non-projective and ψ is an isomorphism, we conclude that τX is non-zero in $\overline{\mathcal{C}}$. As a factor ring of $\operatorname{End}_{\mathcal{C}}(\tau X)$ therefore the endomorphism ring $\overline{\operatorname{End}}(\tau X)$ of τX in the category $\overline{\mathcal{C}}$ is a local ring, whose maximal ideal $\bar{J}$ consists of all classes $\bar{v}$ of non-isomorphisms $v : \tau X \to \tau X$ in $\mathcal{C}$. In particular $\bar{J}$ is properly contained in $\overline{\operatorname{End}}(\tau X)$, hence there exists a non-zero $\mu_X \in \operatorname{Ext}^1(X, \tau X)$ such that

$$\langle \bar{v} \mid \mu_X \rangle = 0 \text{ for each non-isomorphism } v : \tau X \to \tau X.$$

We claim that μ_X is almost-split: For each indecomposable Y of $\mathcal{C}$, let $U(Y) \subseteq \overline{\operatorname{Hom}}(Y, \tau X)$ be the subspace of all classes $\bar{v}$ of non-isomorphisms $v : Y \to \tau X$ in $\mathcal{C}$ and

$$U^{\perp}(Y) := \{\eta \in \operatorname{Ext}^1(X, Y) \mid \langle U(Y) \mid \eta \rangle = 0\}$$

its right orthogonal in $\operatorname{Ext}^1(X, Y)$ with regard to the pairing $\langle - \mid - \rangle$. Clearly, this set-up defines a subfunctor U of $\overline{\operatorname{Hom}}(-, \tau X)$ such that $U(Y) = \overline{\operatorname{Hom}}(Y, \tau X)$ for $Y \ncong \tau X$ and $U(\tau X) = \bar{J} \subsetneq \overline{\operatorname{End}}(\tau X)$.

Since U is a subfunctor of $\overline{\operatorname{Hom}}(-, \tau X)$, formula $\langle \bar{v}_2 \, \bar{v}_1 \mid \eta \rangle = \langle \bar{v}_2 \mid v_1 \, \eta \rangle$ from Lemma (3.2) implies that $U^{\perp}$ is a subfunctor of $\operatorname{Ext}^1(X, -)$. We further deduce from the properties of U that $U^{\perp}(Y) = 0$ for each indecomposable $Y \ncong \tau X$. Since $U(\tau X) = \bar{J}$ is the unique maximal right $\overline{\operatorname{End}}(\tau X)$-submodule of $\overline{\operatorname{End}}(\tau X)$, perfectness of the pairing implies in view of formula $\langle \bar{v}_2 \bar{v}_1 \mid \eta \rangle = \langle \bar{v}_2 \mid v_1 \eta \rangle$ that $U^{\perp}(\tau X)$ is the unique minimal non-zero left $\overline{\operatorname{End}}(\tau X)$-submodule of $\operatorname{Ext}^1(X, \tau X)$, hence in particular a simple module. Let μ_X be any non-zero member of $U^{\perp}(\tau X)$ and $f : \tau X \to Y$ be a non-isomorphism with Y indecomposable. If Y is not isomorphic to τX, then $f\mu_X$ is zero as a member of $U^{\perp}(Y) = 0$. If Y equals τX, then $f\mu_X$ is also zero since f belongs to the radical of $\overline{\operatorname{End}}(\tau X)$ and μ_X belongs to a simple left $\overline{\operatorname{End}}(\tau X)$-module. In any of the two cases therefore the push-out $f\mu_X$ splits, hence μ_X is almost-split. $\square$

5. Serre duality for hereditary categories

We call an abelian category $\mathcal{C}$ *hereditary* if $\operatorname{Ext}^2_{\mathcal{C}}(-, -) = 0$. Equivalently, the functor $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{C}}(-, -)$ is right exact in each variable, meaning that for each object $E \in \mathcal{C}$ the functors $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{C}}(E, -)$ and $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{C}}(-, E)$ send short exact sequences to right exact sequences. It is equivalent to state that $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{C}}(E, -)$ preserves epimorphisms and $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{C}}(-, E)$ sends monomorphisms to epimorphisms. We next establish a supplement to Lemma (2.2).

LEMMA (5.1). *Assume $\mathcal{C}$ is a hereditary category such that for each non-projective indecomposable object X there is an almost-split sequence* $0 \to \tau X \to$

$F \to X \to 0$. *Then each projectively trivial morphism factors through a projective object. If, in particular,* $\mathcal{C}$ *has no non-zero projectives then only the zero morphisms are projectively trivial.*

Proof. Assume that $f : X \to Y$ is a *non-zero* morphism with X and Y indecomposable. If X is projective, there is nothing to show. We thus assume that X is not projective and show in this case that f cannot be projectively trivial. Indeed, we are going to show the existence of $\lambda \in \mathrm{Ext}^1(Y, \tau X)$ such that $\lambda f \neq 0$, which will establish the claim.

Assume first that f is a monomorphism: By heredity the induced map $\mathrm{Ext}^1(f, \tau X) : \mathrm{Ext}^1(Y, \tau X) \to \mathrm{Ext}^1(X, \tau X)$ is an epimorphism, hence non-zero since $\mathrm{Ext}^1(X, \tau X)$ contains an almost-split sequence μ_X.

Assume next that f is not a monomorphism. We then write $f = [X \xrightarrow{p} I \xrightarrow{i} Y]$ as a composition of an epimorphism p with a monomorphism i. By assumption the kernel of f is non-zero, yielding a non-split exact sequence $\alpha : 0 \to K \xrightarrow{j} X \xrightarrow{p} I \to 0$ and an induced exact sequence $\mathrm{Ext}^1(I, \tau X) \xrightarrow{-\circ p} \mathrm{Ext}^1(X, \tau X) \xrightarrow{-\circ j} \mathrm{Ext}^1(K, \tau X)$.

Decomposing $K = \bigoplus_{i=1}^n K_i$ into indecomposables, none of the restrictions $j_i : K_i \to X$ is an isomorphism because α is not split. Hence $\mu_X j = 0$ since μ_X is an almost-split sequence. Therefore there exists η in $\mathrm{Ext}^1(I, \tau X)$ with $\mu_X = \eta p$. Invoking heredity again, $\mathrm{Ext}^1(i, \tau X) : \mathrm{Ext}^1(Y, \tau X) \to \mathrm{Ext}^1(I, \tau X)$ is an epimorphism, we hence obtain λ in $\mathrm{Ext}^1(Y, \tau X)$ with $\eta = \lambda i$. Putting things together we obtain $0 \neq \mu_X = \lambda i p = \lambda f$. □

Combining Lemma (5.1) and its dual with Theorem (1.1) we obtain Serre duality for hereditary categories as a special case of Auslander-Reiten duality. Note that this result also follows from [11], Theorem I.3.3.

THEOREM (5.2). *Assume* $\mathcal{C}$ *is a skeletally small hereditary Ext-finite k-category without non-zero projective or injective objects where k is artinian. Then* $\mathcal{C}$ *has almost-split sequences if and only if the Auslander-Reiten translation* τ *becomes an equivalence of* $\mathcal{C}$ *and Serre duality*

$$\psi_{X,Y} : \mathrm{Hom}(Y, \tau X) \xrightarrow{\cong} \mathrm{DExt}^1(X, Y)$$

holds with natural isomorphisms $\psi_{X,Y}$ *that are functorial in* X *and* Y. □

Remark (5.3). (i) Let $\mathcal{C}$ be an abelian Ext-finite k-category with Serre duality in the form stated in Theorem (5.2), where τ is an equivalence of $\mathcal{C}$. Then $\mathcal{C}$ is hereditary, since—due to duality—the functor $\mathrm{Ext}^1(-, -)$ must be right exact.

(ii) For general information on Serre duality with k a field, we refer to [7], Section III.7, in particular to [7], Theorem 7.6, where Serre duality for an n-dimensional projective scheme X is expressed in terms of natural isomorphisms $\theta^i : \mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, \omega) \to \mathrm{DH}^{n-i}(X, \mathcal{F})$, for each $i \geq 0$, where ω is a dualizing sheaf and $\mathcal{F}$ is any coherent sheaf on X. This is the formulation Grothendieck has given Serre duality [12], see for instance [6], exp. XII. Substituting for $\mathcal{F}$ the Hom-sheaf $\mathcal{H}om(E, F)$ of two coherent sheaves E and F on X leads to a reformulation of Serre duality in the form of natural isomorphisms $\theta^i_{E,F} : \mathrm{Ext}^i(E, F \otimes \omega) \to \mathrm{DExt}^{n-i}(E, F)$ for any two coherent sheaves E and F.

For dimension $n = 1$, additionally assuming X to be smooth where ω can be taken as a line bundle, this yields with $\mathcal{C} = \mathrm{coh}(X)$ the category of coherent sheaves on X as our prime example, where Theorem (5.2) applies. Further examples for hereditary categories with Serre duality are the categories of coherent sheaves for a weighted projective line [5], and more generally the hereditary noetherian categories with Serre duality treated in [11] for k algebraically closed and in [9] for k an arbitrary field.

It is fair to say that Serre duality precedes Auslander-Reiten duality. On the other hand, Serre duality does imply Auslander-Reiten duality only in very special situations, because the respective settings are generally quite different. Note further that—restricting to smooth projective varieties—only for dimension one will Serre duality imply the existence of almost-split sequences for the abelian category of coherent sheaves. For dimension $n > 1$ one has to switch to the derived category of coherent sheaves on X, where an appropriate form of Serre duality holds [3] implying the existence of Auslander-Reiten triangles by [11], Theorem I.2.4.

6. Acknowledgments

The paper was written during a stay of the first author at the UNAM, campus Morelia, enabled through grant *Conacyt-Mex J38611-E* of CONACYT to the second author. The first author wishes to express his thanks for the support and the hospitality.

Received August 14, 2003

Final version received August 04, 2004

H. Lenzing
Institut für Mathematik
Universität Paderborn
D-33100 Paderborn
Germany
helmut@math.uni-paderborn.de

Rita Zuazua
Instituto de Matemáticas UNAM
Campus Morelia
58190 Morelia, Michoacán
México
zuazua@matmor.unam.mx

References

[1] M. Auslander, Selected works of Maurice Auslander, part 1 and 2, Ed. by I. Reiten, S. Smalø, Ø. Solberg. Amer. Math. Soc., Providence, 1999.

[2] M. Auslander, I. Reiten, S. O. Smalø, Representation Theory of Artin Algebras, Cambridge Stud. Adv. Math. v. 36, Cambridge University Press, Cambridge 1995.

[3] A. I. Bondal, *Representations of associative algebras and coherent sheaves*, Math. USSR Izv. **34** (1990) 23-42.

[4] P. Gabriel and A.V. Roiter, Representations of Finite-Dimensional Algebras. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1990.

[5] W. GEIGLE AND H. LENZING, *A class of weighted projective curves arising in representation theory of finite dimensional algebras*, In: Singularities, Representations of Algebras, and Vector Bundles, Lecture Notes Math. **1273**, 265–297, Springer-Verlag, 1987.
[6] A. GROTHENDIECK, SGA 2, Cohomologie Locale des Faisceaux Cohérents et Théorèmes de Lefschetz Locaux et Globaux, North-Holland, Amsterdam 1962.
[7] R. HARTSHORNE, Algebraic Geometry, Springer-Verlag, New York 1977.
[8] H. LENZING, *Auslander's work on Artin algebras*, CMS Conf. Proc. **23** (1998) 83–105.
[9] H. LENZING AND I. REITEN, *Hereditary noetherian categories of domestic or degenerated type*, Preprint, 2003.
[10] B. MITCHELL, Theory of Categories, Academic Press, New York-London, 1965.
[11] I. REITEN AND M. VAN DEN BERGH, *Noetherian hereditary categories satisfying Serre duality*, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002) 295–366.
[12] J.-P. SERRE, *Faisceaux algébriques cohérents*, Ann. of Math. **61** (1955) 197–278.

Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) Vol. 10, 2004

ON THE ALGEBRA GENERATED BY THE HARMONIC BERGMAN PROJECTION AND OPERATORS OF MULTIPLICATION BY PIECEWISE CONTINUOUS FUNCTIONS

MARIBEL LOAIZA

ABSTRACT. Let $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ and let $\mathcal{L}$ be a finite collection of smooth curves in D. Consider the family $PC(D, \mathcal{L}) \subset L_\infty(D)$ of all bounded continuous functions on $D \setminus \mathcal{L}$. We study the C^*-algebra $\mathcal{R}$ generated by the harmonic Bergman projection and by operators of multiplication by functions in $PC(D, \mathcal{L})$

1. Introduction

Let D be the open unit disk in the complex plane with the usual area measure $d\mu(z) = dxdy, \ \ z = x+iy$. The Bergman space $A^2(D)$ is the set of all functions analytic on D which are in $L_2(D)$. We denote by B_D the Bergman orthogonal projection from $L_2(D)$ onto $A^2(D)$.

A function $f(z) \in L_2(D)$ is called anti-analytic if

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0.$$

Denote by $\widetilde{A}^2(D)$ the subspace of $L_2(D)$ of all anti-analytic functions. Let $\widetilde{B}_D$ be the orthogonal projection from $L_2(D)$ onto $\widetilde{A}^2(D)$.

For a twice continuously differentiable complex-valued function $u(z)$ the Laplacian is defined by

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \ \ z = x+iy,$$

and $u(z)$ is called harmonic if $\Delta u = 0$. Consider the subspace $b^2(D)$ of $L_2(D)$ of all complex-valued harmonic functions and denote by $P_{b^2(D)}$ the orthogonal projection from $L_2(D)$ onto $b^2(D)$. Point evaluation is a bounded functional on $b^2(D)$ (see [1]). Thus for every $z \in D$, there exists a unique $K(z, .) \in b^2(D)$ such that

$$f(z) = \int_D f(\omega)\overline{K(z,\omega)}dA(\omega)$$

for all $f \in b^2(D)$. The function $K(z, .)$ is called the reproducing kernel for $b^2(D)$ and is given by the formula ([1])

$$K(z,\omega) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{(1-\overline{z}\omega)^2} + \frac{1}{(1-z\overline{\omega})^2} - 1\right).$$

2000 *Mathematics Subject Classification*: 31A05, 32A10, 32A36, 47L80.

Keywords and phrases: operator algebras, harmonic functions, Bergman spaces, holomorphic functions.

Partially supported by DGAPA-PAPIIT IN101303.

Thus $P_{b^2(D)}$ is written as

$$P_{b^2(D)} = B_D + \widetilde{B}_D + T, \tag{1.1}$$

where T is the one-dimensional operator given by the formula

$$(Tf)(w) = -\int_D f(z)dz.$$

Denote by $\mathcal{R}$ the C^*-algebra generated by all operators of the form

$$A = a(z)I + b(z)P_{b^2(D)} + K,$$

where K is a compact operator and the coefficients a, b are piecewise continuous functions (see Section 3).

Using (1.1) we write the last equation in the following form

$$A = a(z)I + b(z)(B_D + \widetilde{B}_D) + K, \tag{1.2}$$

where K is a compact operator.

Consider the two dimensional singular integral operator $S_D : L_2(D) \to L_2(D)$ given by

$$S_D(f)(z) = -\frac{1}{\pi}\int_D \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\mu(\xi).$$

From the results of Dzhuraev (see [6]) we deduce that, in terms of S_D, the projections B_D and $\widetilde{B}_D$ are represented as follows

$$B_D = I - S_D S_D^*, \quad \widetilde{B}_D = I - S_D^* S_D.$$

Since the operator S_D is of local type, which means that it commutes with all operators of multiplication by a continuous (on $\overline{D}$) function up to a compact operator, the projections B_D and $\widetilde{B}_D$ are also local type operators, and clearly so is the operator given in (1.2).

Denote by $\mathcal{K}$ the ideal of all compact operators acting on $L_2(D)$. The Calkin algebra of $\mathcal{R}$ is denoted by $\widehat{\mathcal{R}}$. This means $\widehat{\mathcal{R}} = \mathcal{R}/\mathcal{K}$. Let $\pi : \mathcal{R} \to \widehat{\mathcal{R}}$ be the canonical projection.

To study $\widehat{\mathcal{R}}$ we will use the standard local principle ([4], [16]) with $\pi(C(\overline{D})I)$, which is isomorphic to $C(\overline{D})I$, used as a subalgebra of the center of $\widehat{\mathcal{R}}$. The ideal space of $C(\overline{D})I$ is isomorphic to $\overline{D}$.

2. The algebra $\Psi(H(PC(\mathbb{T}, \Lambda)), H(C(\mathbb{T})))$

Let $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ with the usual normalized length arc measure dt. For $L_2(\mathbb{T})$ we have the inner product

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{T}} f(t)\overline{g(t)}dt.$$

The Mellin transform $M : L_2(\mathbb{R}_+, rdr) \to L_2(\mathbb{R}, d\lambda)$ is given for functions $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ by

$$(Mv)(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}_+} r^{-i\lambda}v(r)dr.$$

In polar coordinates we have that $L_2(\mathbb{R}^2) = L_2(\mathbb{R}_+, rdr) \otimes L_2(\mathbb{T}, dt)$.

For a complex number λ, different from $\lambda = i(k + \frac{n}{2})$, $k = 0, 1, \dots,$ let $E(\lambda) : L_2(\mathbb{T}) \to L_2(\mathbb{T})$ denote the operator of spherical convolution defined in [14]. For each $\lambda \in \mathbb{R}$, $E(\lambda)$ is a unitary operator ([9]) and

$$E(\lambda)t^n = (-i)^n 2^{i\lambda} \frac{\Gamma(\frac{n+i\lambda+1}{2})}{\Gamma(\frac{n-i\lambda+1}{2})} t^n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

The representation of the Fourier transform in $L_2(\mathbb{R}^2)$ is given in the following proposition.

PROPOSITION (2.1). ([9], [14]) *The Fourier transform has the following representation*

$$F = (M^{-1} \otimes I)(V \otimes I)(I \otimes E(\lambda))(M \otimes I),$$

where M is the Mellin transform and V is the operator $Vf(\lambda) = f(-\lambda)$.

Consider the singular integral operator S defined by

$$(S\varphi)(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi(t)}{t - z} dt, \qquad \varphi \in L_2(\mathbb{T}),$$

and the orthogonal projections $P_{\pm} = \frac{1}{2}(I \pm S)$.

Let $\Lambda = \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$ be a finite set of points in $\mathbb{T}$. Denote by $PC(\mathbb{T}, \Lambda)$ the set of all continuous functions in $\mathbb{T} \backslash \Lambda$ having one-sided limits at the points of Λ; by $H(PC(\mathbb{T}, \Lambda))$, the set of all homogeneous functions of order zero in $\mathbb{R}^2$ whose restrictions to $\mathbb{T}$ belong to $PC(\mathbb{T}, \Lambda)$; and by $H(C(\mathbb{T}))$, the set of all homogeneous functions of order zero whose restrictions to $\mathbb{T}$ are continuous. Consider the algebra $\mathcal{R}_1 = \Psi(H(PC(\mathbb{T}, \Lambda)), H(C(\mathbb{T})))$ generated by all operators of the form

$$a(t)I, \quad a \in H(PC(\mathbb{T}, \Lambda)) \text{ and } F^{-1}b(\omega)F, \quad b \in H(C(\mathbb{T}))$$

acting on $L_2(\mathbb{R}^2)$. For $\lambda \in \mathbb{R}$, introduce the C^*-algebra $\mathfrak{S}_\lambda$ generated by all operators of the form

$$a(t)I, \qquad b_\lambda(\Omega) = E(\lambda)^{-1} b(\omega) E(\lambda)$$

with $a(t) \in PC(\mathbb{T}, \Lambda)$ and $b(t) \in C(\mathbb{T})$. Let $\mathfrak{S}$ be the C^*-algebra of all continuous and bounded functions $f : \mathbb{R} \to \bigsqcup_{\lambda \in \mathbb{R}} \mathfrak{S}_\lambda$ such that $f(\lambda) \in \mathfrak{S}_\lambda$ with the norm

$$\|f\| = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \|f(\lambda)\| .$$

THEOREM (2.2). ([9]) *The algebra $\mathcal{R}_1 = \Psi(H(PC(\mathbb{T}, \Lambda)), H(C(\mathbb{T}))$ is isomorphic to a subalgebra of $\mathfrak{S}$. The embedding isomorphism is given by the following mapping of the generators:*

$$\begin{array}{rcl} a(x)I & \mapsto & a(t)I, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ F^{-1}b(\omega)F & \mapsto & b(it)P_+ + b(-it)P_- + K(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \end{array}$$

where $K(\lambda) = E(\lambda)^{-1} b(\omega) E(\lambda) - b(it)P_+ - b(-it)P_-$ is a compact operator, $a(x) \in H(PC(\mathbb{T}, \Lambda))$ and $b(\omega) \in H(C(\mathbb{T}))$.

3. Local algebras of the Calkin algebra of $\mathcal{R}$

From now on $\mathcal{L}$ will denote a finite collection of smooth curves in D such that for every point $z \in \partial D \cap \mathcal{L}$, where two or more curves of $\mathcal{L}$ converge, there is a ball $V(z, r_z)$ such that the part of $\mathcal{L}$ contained in $V(z, r_z)$ can be transformed, by a Möbius transformation, into radial segments in the upper half-plane outgoing from the origin. Thus $\mathcal{L}$ consists of curves which are locally hypercycles at every point of ∂D where two or more of these curves converge.

Given natural numbers $1 < n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_k < \infty$ and a set $\{z_1, \ldots, z_k\} \subset \partial D$, we choose $\mathcal{L}$ such that for $1 \leq i \leq k$ the family $\mathcal{L}$ contains $n_i - 1$ curves converging to z_i. Denote by $PC(D, \mathcal{L})$ the set of all continuous functions on $D \backslash \mathcal{L}$ having one-sided finite limits at the points of $\mathcal{L}$. We also assume that each function in $PC(D, \mathcal{L})$ has finite limits at every boundary point of D.

In this section we describe the Calkin algebra of $\mathcal{R}$ using the local principle ([4], [16]). Since each element of $\mathcal{R}$ is of local type, we use the image of $C(\overline{D})I$ under the canonical projection $\pi : \mathcal{R} \rightarrow \widehat{\mathcal{R}}$ as a subalgebra of the center of $\widehat{\mathcal{R}}$. This image is isomorphic to $C(\overline{D})$ and so its ideal space is isomorphic to $\overline{D}$. For a point $z_0 \in \overline{D}$ denote by $\widehat{\mathcal{R}}(z_0)$ the local algebra of $\widehat{\mathcal{R}}$ at the point z_0. We begin describing the local algebra at a point of $D \setminus \mathcal{L}$.

Let $z_0 \in D \setminus \mathcal{L}$. Each function of $PC(D, \mathcal{L})$ is continuous at z_0, and then the local algebra $\widehat{\mathcal{R}}(z_0)$ is isomorphic to $\mathbb{C}$ as we show next.

THEOREM (3.1). *Let $z_0 \in D \setminus \mathcal{L}$. Then the local algebra $\widehat{\mathcal{R}}(z_0)$ is isomorphic to $\mathbb{C}$. The isomorphism is given by the following transforms of the generators of $\mathcal{R}$:*

$$A = a(z)I + b(z)(B_D + \widetilde{B}_D) + K \mapsto a(z_0).$$

Proof. The projection $\widetilde{B}_D$ is locally equivalent to zero at the point z_0 and the same happens for B_D. □

The following step is to analyze the local algebra of $\widehat{\mathcal{R}}$ at a point $z_0 \in \mathcal{L}$. Suppose that m curves, $\ell_1, \ldots, \ell_m \in \mathcal{L}$, converge to z_0 and assume that these curves divide the disk D in m regions denoted by $R_1, \ldots, R_m$. For a function $a(z) \in PC(D, \mathcal{L})$ let

$$a_i = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in R_i}} a(z).$$

THEOREM (3.2). *Let $z_0 \in D \cap \mathcal{L}$, and suppose that m curves from $\mathcal{L}$ converge to z_0. Then the local algebra $\widehat{\mathcal{R}}(z_0)$ is isomorphic to $\mathbb{C}^m$. The isomorphism is given by the following transforms of the generators of $\mathcal{R}$:*

$$A = a(z)I + b(z)(B_D + \widetilde{B}_D) + K \mapsto (a_1, \ldots, a_m).$$

Proof. The operator A is locally equivalent, at the point z_0, to

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{R_i} I,$$

where χ_{R_i} is the characteristic function of the set R_i. □

Describing the local algebra at a boundary point is more complicated, especially when curves from $\mathcal{L}$ converge to it.

THEOREM (3.3). *Let $z_0 \in \partial D \setminus \mathcal{L}$. Then the local algebra $\widehat{\mathcal{R}}(z_0)$ is isomorphic to $\mathbb{C}^2$. The isomorphism is given by the following transforms of the generators of $\mathcal{R}$:*

$$A = a(z)I + b(z)(B_D + \widetilde{B}_D) + K \mapsto (a(z_0), a(z_0) + b(z_0)).$$

Proof. At a boundary point the Bergman projection is locally equivalent to itself. The same happens with the projection $\widetilde{B}_D$; i.e., $\widetilde{B}_D$ is locally equivalent to itself at a boundary point. On the other hand the operator of multiplication by a function $g(z)I$ is locally equivalent to $g(z_0)I$ at the point z_0. □

Let us consider a point $z_i \in \{z_1, \dots, z_k\}$ and let $\ell_1, \dots, \ell_{n_{i-1}} \in \mathcal{L}$ be n_{i-1} curves converging to z_i. Without loss of generality we may assume that these curves divide the unit disk in n_i regions $R_1, \dots, R_{n_i}$. For a function $f \in PC(D, \mathcal{L})$ let

$$f_j = \lim_{\substack{z \to z_i \\ z \in R_j}} f(z).$$

Let $P_j = \chi_{R_j} I$ where χ_j is the characteristic function of the set R_j, $j = 1, \dots n_i$.

THEOREM (3.4). *The local algebra $\widehat{\mathcal{R}}(z_i)$ is isomorphic to the algebra generated by $B_D + \widetilde{B}_D$ and the orthogonal projections $P_1, \dots, P_{n_i}$. The isomorphism is given by the following transforms of the generators of $\mathcal{R}$:*

$$A = a(z)I + b(z)(B_D + \widetilde{B}_D) + K \mapsto \sum_{j=1}^{n_i} (a_j \chi_{R_j} I + b_j \chi_{R_j}(B_D + \widetilde{B}_D)).$$

At this point we will use the additional property of the curves at the boundary: they are transformed into radial segments in the upper half-plane.

Consider the Möbius transformation

$$L(z) = i\frac{z+1}{1-z}$$

which transforms the unit disk into the upper half-plane $\mathbb{R}^2_+$. Let U be the unitary operator given by the formula

$$U(\varphi)(z) = \frac{2i}{(1-\overline{z})^2}\varphi\left(i\frac{z+1}{1-z}\right).$$

The inverse operator is given by the rule

$$U^{-1}(\varphi)(w) = \frac{2i}{(\overline{w}-i)^2}\varphi\left(i\frac{w-i}{w+i}\right).$$

The operator U preserves anti-analytic functions.

Consider the two dimensional singular integral operator $S_{\mathbb{R}^2_+}$ given by

$$S_{\mathbb{R}^2_+}(f)(w) = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}^2_+} \frac{f(\xi)}{(\xi - w)^2} d\xi.$$

The Bergman projection of the upper half-plane is written in the following form ([6]):

$$B_{\mathbb{R}^2_+} = I - S_{\mathbb{R}^2_+} S^*_{\mathbb{R}^2_+}.$$

A similar formula holds for the orthogonal projection onto the space of all functions anti-analytic in the upper half-plane ([6]):

$$\widetilde{B}_{\mathbb{R}^2_+} = I - S^*_{\mathbb{R}^2_+} S_{\mathbb{R}^2_+}.$$

Straightforward calculations show the following result.

THEOREM (3.5). *The operator S_D is unitary equivalent to the operator $-WS_{\mathbb{R}^2_+}$ where the operator W is given by*

$$(W\varphi)(w) = \left(\frac{w+i}{\overline{w}-i}\right)^2 \varphi(w).$$

The following corollaries are immediate consequences of the representation, in terms of the operator S_D, of the projections $\widetilde{B}_D$ and B_D.

COROLLARY (3.6). *The projection $\widetilde{B}_D$ is unitary equivalent to the projection $\widetilde{B}_{\mathbb{R}^2_+}$.*

COROLLARY (3.7). *The projection B_D is unitary equivalent to $WB_{\mathbb{R}^2_+}W^*$.*

Locally at the origin the operator W is equivalent to the identity operator. Thus the local algebra of $\widehat{\mathfrak{R}}$ at the point z_i is isomorphic to the algebra generated by $B_{\mathbb{R}^2_+} + \widetilde{B}_{\mathbb{R}^2_+}$ and the projections $U^{-1}P_1U, \dots, U^{-1}P_{n_i}U$.

Let us analyze how the unitary operator U acts on the projections $P_1, \dots, P_{n_i}$. For $j = 1, \dots, n_i - 1$ let $L_j = L(\ell_j)$, $R'_j = L(R_j)$ and $P'_j = \chi_{R'_j} I$.

THEOREM (3.8). *For $j = 1, \dots, n_i$, the orthogonal projection P_j is unitary equivalent to the operator P'_j.*

COROLLARY (3.9). *The local algebra $\widehat{\mathfrak{R}}(z_i)$ is isomorphic to the algebra generated by $P'_1, \dots, P'_{n_i}$ and $B_{\mathbb{R}^2_+} + \widetilde{B}_{\mathbb{R}^2_+}$.*

Let $\theta_0 = 0$, $\theta_{n_i} = \pi$ and for $j = 1, \dots, n_i - 1$ let θ_j be the angle between the real axis and the segment L_j. We have that $\theta_0 = 0 < \theta_1 < \cdots < \theta_{n_i} = \pi$. Let $Q_1, \dots, Q_{n_i}$ be the projections acting on $L_2(\mathbb{T})$ given by

$$Q_j f(t) = \chi_j f(t), \quad t \in \mathbb{T}, \tag{3.10}$$

where χ_j is the characteristic function of the arc determined by the angles θ_{j-1} and θ_j, $j = 1, \dots, n_i$.

PROPOSITION (3.11). *The operator P'_j is unitary equivalent to the operator $I \otimes Q_j$, $j = 1, \dots, n_i$.*

Proof. Follows from Theorem (2.2). □

The Fourier symbol of $S_{\mathbb{R}^2}$ is $\frac{x-iy}{x+iy}$. This means that

$$S_{\mathbb{R}^2} = F^{-1}\frac{x-iy}{x+iy}F,$$

where F is the Fourier transform acting on $L_2(\mathbb{R}^2)$.

The corresponding symbol for $S^*_{\mathbb{R}^2}$ is $\frac{x+iy}{x-iy}$.

THEOREM (3.12) ([11]). *The operator $S_{\mathbb{R}^2}$ is unitary equivalent to the operator $I \otimes S_1(\lambda)$ where $S_1(\lambda) = -t^{-2}I + K_1(\lambda)$ for $\lambda \in \mathbb{R}$ and the operator $K_1(\lambda) = E(\lambda)^{-1}w^{-2}E(\lambda) + t^{-2}I$ is a compact operator.*

Denote by $\mathbb{T}_+$ the set of all points $z \in \mathbb{T}$ such that $\operatorname{Im} z > 0$.

THEOREM (3.13) ([11]). *The operator $B_{\mathbb{R}^2_+}$ is unitary equivalent to $I \otimes B(\lambda)$, where for each $\lambda \in \mathbb{R}$, $B(\lambda) : L_2(\mathbb{T}_+) \to L_2(\mathbb{T}_+)$ is given by*

$$B(\lambda) = \chi_{\mathbb{T}_+}(t^{-2}IK_1(\lambda)^* + K_1(\lambda)t^2I - K_1(\lambda)\chi_{\mathbb{T}_+}K_1(\lambda)^*)\chi_{\mathbb{T}_+}.$$

THEOREM (3.14) ([11]). *The dimension* $\dim(\operatorname{Im} B(\lambda)) = 1$ *for all* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Moreover $B(\lambda)$ is the orthogonal projection onto the space generated by the function*

$$g_\lambda = \left(\frac{2\lambda}{1 - e^{-2\lambda\pi}}\right)^{1/2} \chi_{\mathbb{T}_+} t^{i\lambda - 1},$$

for $\lambda \neq 0$ and

$$g_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\chi_{\mathbb{T}_+} t^{-1}.$$

THEOREM (3.15) ([11]). *The following relations hold.*

$$\begin{aligned}
&a)\ \lim_{\lambda\to-\infty} \|Q_j(g_\lambda)\|^2 = 0, \quad \lim_{\lambda\to\infty} \|Q_j(g_\lambda)\|^2 = 0, \quad j = 2, \dots, n_i - 1,\\
&b)\ \lim_{\lambda\to-\infty} \|Q_1(g_\lambda)\|^2 = 0, \quad \lim_{\lambda\to\infty} \|Q_1(g_\lambda)\|^2 = 1,\\
&c)\ \lim_{\lambda\to-\infty} \|Q_{n_i}(g_\lambda)\|^2 = 1, \quad \lim_{\lambda\to\infty} \|Q_{n_i}(g_\lambda)\|^2 = 0.
\end{aligned}$$

THEOREM (3.16). *The projection $\widetilde{B}_{\mathbb{R}^2_+}$ is unitary equivalent to the operator $I \otimes \widetilde{B}(\lambda)$, where $\widetilde{B}(\lambda) : L_2(\mathbb{T}_+) \to L_2(\mathbb{T}_+)$ is given by*

$$\widetilde{B}(\lambda) = \chi_{\mathbb{T}_+}(t^2IK_1(\lambda) + K_1^*(\lambda)t^{-2}I - K_1^*(\lambda)\chi_{\mathbb{T}_+}K_1(\lambda))\chi_{\mathbb{T}_+}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Proof.

$$\begin{aligned}
\widetilde{B}(\lambda) &= \chi_{\mathbb{T}_+} - \chi_{\mathbb{T}_+}(-t^2I + K_1^*(\lambda))\chi_{\mathbb{T}_+}(-t^{-2}I + K_1(\lambda))\chi_{\mathbb{T}_+}\\
&= \chi_{\mathbb{T}_+}(t^2IK_1^*(\lambda) + K_1^*(\lambda)t^{-2}I - K_1^*(\lambda)\chi_{\mathbb{T}_+}K_1(\lambda))\chi_{\mathbb{T}_+}.
\end{aligned}$$

□

The proof of the following proposition is similar to the corresponding one for the family $\{B(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ given in [11].

PROPOSITION (3.17). *The family $\{\widetilde{B}(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ depends continuously in norm on the parameter λ.*

Proposition (3.17) implies that the dimension of the image $\operatorname{Im}(\widetilde{B}(\lambda))$ is the same for all $\lambda \in \mathbb{R}$ ([10]).

PROPOSITION (3.18). *The projection $\widetilde{B}(0)$ is a one dimensional projection.*

Proof.

$$\widetilde{B}(0) = \chi_{\mathbb{T}_+}(t^2 K_1(0) + K_1^*(0)t^{-2}I - K_1^*(0)\chi_{\mathbb{T}_+}K_1(0))\chi_{\mathbb{T}_+}.$$

For $m \in \mathbb{Z}$ let

$$\chi_{\mathbb{T}_+}t^m = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle \chi t^m, t^n\rangle\, t^n$$

be the expansion of $\chi_{\mathbb{T}_+}t^m$ in Fourier series. We have

$$\begin{aligned}\widetilde{B}(0)t^m &= \chi_{\mathbb{T}_+}(t^2 K_1(0) + K_1^*(0)t^{-2}I - K_1^*(0)\chi_{\mathbb{T}_+}K_1(0))\chi_{\mathbb{T}_+}t^m \\ &= \left\langle t^m, \tfrac{\chi_{\mathbb{T}_+}t}{\sqrt{\pi}}\right\rangle \tfrac{\chi_{\mathbb{T}_+}t}{\sqrt{\pi}}\,;\end{aligned}$$

thus $\widetilde{B}(0)$ is a one dimensional projection. □

COROLLARY (3.19). *The projection $\widetilde{B}(\lambda)$ is one dimensional for all $\lambda \in \mathbb{R}$.*

THEOREM (3.20). *Let $f \in L_2(\mathbb{R}^2)$ such that $f|_{\mathbb{R}^2\setminus\mathbb{R}^2_+} \equiv 0$ and $f|_{\mathbb{R}^2_+} \in \widetilde{A}^2(\mathbb{R}^2_+)$. For $\lambda \in \mathbb{R}$ let $f_\lambda \in L_2(\mathbb{T})$ such that*

$$(M \otimes I)f = I \otimes f_\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Then f_λ is a fixed point for $\widetilde{B}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Proof. Since

$$(M \otimes I)\chi_{\mathbb{R}^2_+}\widetilde{B}_{\mathbb{R}^2_+}\chi_{\mathbb{R}^2_+}(M^{-1} \otimes I) = I \otimes \widetilde{B}(\lambda)$$

we obtain

$$\begin{aligned}(I \otimes \widetilde{B}(\lambda))(I \otimes f_\lambda) &= (M \otimes I)\chi_{\mathbb{R}^2_+}\widetilde{B}_{\mathbb{R}^2_+}\chi_{\mathbb{R}^2_+}(M^{-1} \otimes I)(I \otimes f_\lambda) \\ &= (M \otimes I)\chi_{\mathbb{R}^2_+}\widetilde{B}_{\mathbb{R}^2_+}\chi_{\mathbb{R}^2_+}f \\ &= (M \otimes I)f \\ &= I \otimes f_\lambda.\end{aligned}$$

□

The last theorem allows us to find the generator of the image of $\widetilde{B}(\lambda)$. The proof of the following theorem is similar to the proof of Theorem 3.10, given in [11].

PROPOSITION (3.21). *For $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ the function $\widetilde{g_\lambda} = (\frac{2\lambda}{e^{2\lambda\pi}-1})^{\frac{1}{2}}\chi_{\mathbb{T}_+}t^{-i\lambda+1}$ generates* $\operatorname{Im}\widetilde{B}(\lambda)$*. The function $\widetilde{g_0} = \frac{\chi_{\mathbb{T}_+}t^1}{\sqrt{\pi}}$ generates* $\operatorname{Im}\widetilde{B}(0)$*.*

The following theorem is immediate.

THEOREM (3.22). *For $j = 1, \ldots, n_i$ we have*

$$\|Q_j(\widetilde{g_\lambda})\|^2 = \frac{e^{2\lambda\theta_j} - e^{2\lambda\theta_{j-1}}}{e^{2\lambda\pi} - 1}, \quad \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

and

$$\|Q_j(\widetilde{g_0})\|^2 = \frac{\theta_j - \theta_{j-1}}{\pi}.$$

Furthermore

a) $\lim_{\lambda\to-\infty}\|Q_j(\widetilde{g}_\lambda)\|^2=0, \quad \lim_{\lambda\to-\infty}\|Q_j(\widetilde{g}_\lambda)\|^2=0, \quad j=2,\dots,n_i-1;$

b) $\lim_{\lambda\to-\infty}\|Q_1(\widetilde{g}_\lambda)\|^2=1, \quad \lim_{\lambda\to\infty}\|Q_1(\widetilde{g}_\lambda)\|^2=0;$

c) $\lim_{\lambda\to-\infty}\|Q_{n_i}(\widetilde{g}_\lambda)\|^2=0, \quad \lim_{\lambda\to\infty}\|Q_{n_i}(\widetilde{g}_\lambda)\|^2=1.$

Proof. It follows from the definition of Q_j and $\widetilde{g}_\lambda$. □

Let $\widehat{\mathcal{R}}_\lambda$ be the C^*-algebra generated by $B(\lambda)+\widetilde{B}(\lambda)$ and the projections $Q_1, Q_2, \dots, Q_{n_i}$ given by equation (3.10).

Since g_λ is orthogonal to $\widetilde{g}_\lambda$ the projection $B(\lambda)+\widetilde{B}(\lambda)$ is a two dimensional projection. At this point we will follow the procedure given in [20].

Let L be the subspace of $L_2(\mathbb{T}_+)$ generated by g_λ and $\widetilde{g}_\lambda$. The orthogonal projection $P=B(\lambda)+\widetilde{B}(\lambda)$ is given by the formula

$$P\varphi=\langle\varphi, g_\lambda\rangle g_\lambda+\langle\varphi,\widetilde{g}_\lambda\rangle\widetilde{g}_\lambda,$$

for $\varphi\in L_2(\mathbb{T}_+)$. Let M_l denote the image of the projection Q_l for $l=1,\dots,n_i$. Then

$$L_2(\mathbb{T}_+)=M_1+M_2+\cdots+M_{n_i}.$$

It is easy to see that $M_l\cap L=\{0\}$, $M_l\not\subset L^\perp$. The space $L_2(\mathbb{T}_+)$ is written as the following direct sum,

$$L_2(\mathbb{T}_+)=(M_1\cap L^\perp)\oplus\cdots\oplus(M_{n_i}\cap L^\perp)\oplus\mathcal{M}.$$

Obviously $L\subset\mathcal{M}$. Let $P'=P|_{\mathcal{M}}$, $Q'_l=Q_l|_{\mathcal{M}}$ for $l=1,\dots,n_i$. Since $M_l\not\subset L^\perp$ all restrictions Q'_l to $\mathcal{M}$ are nontrivial. Furthermore the image $\operatorname{Im}P'=L$, $\operatorname{Im}Q'_l=M_l\cap\mathcal{M}=M'_l$ and

$$\mathcal{M}=M'_1\oplus\cdots\oplus M'_{n_i}.$$

For $l=1,\dots,n_i$, let us consider the restriction $P'|_{M'_l}:M'_l\to L$. Suppose that there exists $g\in M'_l$ such that $P(g)=0$. Then $g\in L^\perp\cap M_l\cap\mathcal{M}=\{0\}$. Thus the dimension of M'_l is 1 or 2.

Consider the following functions,

$$g(\theta)=\begin{cases} e^{\lambda\theta}e^{-i\theta} & \text{if } \ \theta_{l-1}<\theta<\frac{\theta_l+\theta_{l-1}}{2},\\ -e^{\lambda\theta}e^{-i\theta} & \text{if } \ \frac{\theta_l+\theta_{l-1}}{2}<\theta<\theta_l,\\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases}$$

$$h(\theta)=\begin{cases} e^{-\lambda\theta}e^{i\theta} & \text{if } \ \theta_{l-1}<\theta<\frac{\theta_l+\theta_{l-1}}{2},\\ -e^{-\lambda\theta}e^{i\theta} & \text{if } \ \frac{\theta_l+\theta_{l-1}}{2}<\theta<\theta_l,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

Straightforward calculations show that $\langle g,g_\lambda\rangle=0$, $\langle g,\widetilde{g}_\lambda\rangle\neq0$, $\langle h,g_\lambda\rangle\neq0$ and $\langle h,\widetilde{g}_\lambda\rangle=0$.

A function $f \in M_l$ is represented as $f = f_l + f_l'$ with $f_l \in M_l \cap L^\perp$ and $f_l' \in \mathcal{M}$. In fact $f_l' \in M_l'$. Since $g_l = g - g_l'$, $h_l = h - h_l' \in M_l \cap L^\perp$ we have

$$\langle g_l', g_\lambda \rangle = \langle g, g_\lambda \rangle = 0$$

and

$$\langle g_l', \widetilde{g}_\lambda \rangle = \langle g, \widetilde{g}_\lambda \rangle \neq 0.$$

Similar calculations show that

$$\langle h_l', g_\lambda \rangle = \langle h, g_\lambda \rangle \neq 0$$

and

$$\langle h_l', \widetilde{g}_\lambda \rangle = \langle h, \widetilde{g}_\lambda \rangle = 0.$$

So g_l', h_l' are two linearly independent elements of M_l'. Thus the dimension of M_l' is two. Let $\{m_l, m_l'\}$ be a basis for M_l'. Then the set $\{m_1, m_1', \ldots, m_{n_i}, m_{n_i}'\}$ is a basis for $\mathcal{M}$. Using the decomposition

$$\mathcal{M} = \oplus_{l=1}^{n_i} M_l'$$

the projections P' and Q' have the following form:

$$P' = (Q_l' P' Q_j')_{l,j=1}^{n_i},$$

$$Q_l' = \mathrm{Diag}(0, \ldots, 0, I, 0, \ldots, 0), \quad l = 1, \ldots n_i.$$

PROPOSITION (3.23). *The algebra generated by P' and Q_l', $l = 1, \ldots, n_i$, is irreducible and therefore is isomorphic to $M_{2n_i}(\mathbb{C})$.*

Proof. It suffices to prove that the commutator of this algebra is $\mathbb{C}I = \{M \in M_{2n_i}(\mathbb{C}) | M = cI$ where c is a constant$\}$. Consider a matrix $B \in M_{2n_i}(\mathbb{C})$ such that $BQ_l = Q_l B$, $l = 1, \ldots, n_i$ and $P'B = BP'$, then B is of the form

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & B_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & B_{n_i} \end{pmatrix},$$

where $B_l = \begin{pmatrix} b_{l1} & b_{l2} \\ b_{l3} & b_{l4} \end{pmatrix}$, $l = 1, \ldots, n_i$, is a 2×2 matrix. The set $\{m_l = \frac{g_l'}{\|g_l'\|}, m_l' = \frac{Q_l(g_\lambda)}{\|Q_l(g_\lambda)\|}\}$ is a basis for M_l'. Let $\alpha_j = \langle m_j, g_\lambda \rangle$, $\beta_j = \langle m_j', g_\lambda \rangle$ and $\gamma_j = \langle m_j', \widetilde{g}_\lambda \rangle$. Then $\alpha_j \neq 0$, $\beta_j \neq 0$, $\gamma_j \neq 0$ and

$$P'(m_j) = \alpha_j \widetilde{g}_\lambda, \quad P'(m_j') = \beta_j g_\lambda + \gamma_j \widetilde{g}_\lambda.$$

So

$$Q_l'(P'(m_j)) = \alpha_j \overline{\alpha_l} m_l + \alpha_j \overline{\gamma_l} m_l',$$

and

$$Q_l'(P'(m_j')) = \alpha_j \overline{\alpha_l} m_l + (\beta_j \overline{\beta_l} + \gamma_j \overline{\gamma_l}) m_l'.$$

Then the matrix for P, in the basis for $\mathcal{M}$ given above, is

$$\begin{pmatrix} \alpha_j \overline{\alpha_l} & \gamma_j \overline{\alpha_l} \\ \alpha_j \overline{\gamma_l} & \beta_j \overline{\beta_l} + \gamma_j \overline{\gamma_l} \end{pmatrix}_{l,j=1}^{n_i}. \tag{3.24}$$

The matrix B commutes with the matrix (3.24), so

$$\begin{pmatrix} b_{l1}\alpha_j\overline{\alpha_l} + b_{l2}\alpha_j\overline{\gamma_l} & b_{l1}\gamma_j\overline{\alpha_l} + b_{l2}(\beta_j\overline{\beta_l} + \gamma_j\overline{\gamma_l}) \\ b_{l3}\alpha_j\overline{\alpha_l} + b_{l4}\alpha_j\overline{\gamma_l} & b_{l3}\gamma_j\overline{\alpha_l} + b_{l4}(\beta_j\overline{\beta_l} + \gamma_j\overline{\gamma_l}) \end{pmatrix}_{l,j=1}^{n_i} =$$

$$\begin{pmatrix} b_{j1}\alpha_j\overline{\alpha_l} + b_{j3}\gamma_j\overline{\alpha_l} & b_{j2}\alpha_j\overline{\alpha_l} + b_{j4}\gamma_j\overline{\alpha_l} \\ b_{j1}\alpha_j\overline{\gamma_l} + b_{j3}(\beta_j\overline{\beta_l} + \gamma_j\overline{\gamma_l}) & b_{j2}\alpha_j\overline{\gamma_l} + b_{j4}(\beta_j\overline{\beta_l} + \gamma_j\overline{\gamma_l}) \end{pmatrix}_{l,j=1}^{n_i}.$$

Straightforward calculations show that the solutions of the system of equations produced by the last equality are $B_l = B_j = cI, l, j = 1, \ldots, n_i$, for $c \in \mathbb{C}$. □

Introducing the operators $F_l = Q'_l|_L : L \to M'_l$ and their adjoint $F_l^* = P'|_{M'_l} : M'_l \to L$ we have

$$Q'_l P' Q'_j = Q'_l P' P' Q'_j = F_l F_j^*, \quad l, j = 1, \ldots, n_i.$$

Let us consider the polar decomposition $F_l = U_l D_l$, where $U_l : L \to M'_l$ is a unitary operator and $D_l : L \to L$ is a positive operator. Introduce the unitary operator

$$U_0 = \mathrm{Diag}(U_1, \ldots, U_{n_i}) : (L)^{n_i} \to \mathcal{M} = \oplus_{l=1}^{n_i} M'_l.$$

Then the projections $P'' = U_0^* P' U_0$ and $Q''_l = U_0^* Q'_l U_0$ have the following form:

$$P'' = (D_l D_j)_{l,j=1}^{n_i}, \; Q''_l \qquad = \mathrm{Diag}(0, \ldots, I, 0, \ldots, 0).$$

LEMMA (3.25). *The projections P'' and Q''_l acting on $(L)^{n_i}$ admit the following representation*

$$P'' = (\sqrt{C_l}\sqrt{C_j})_{l,j=1}^{n_i},$$
$$Q''_l = \mathrm{Diag}(0, \ldots, I, 0, \ldots, 0),$$

where the contractions $C_l, l = 1, \ldots, n_i$ are defined by

$$C_l = P' Q'_l|_L, l = 1, \ldots, n_i - 1,$$
$$C_{n_i} = I - \sum_{l=1}^{n_i - 1} C_l.$$

Let $\{m_l, m'_l\}$ be a basis for M'_l. Then

$$\begin{aligned} P'(Q'_l(g_\lambda)) &= [\langle g_\lambda, m_l\rangle\langle m_l, g_\lambda\rangle + \langle g_\lambda, m'_l\rangle\langle m'_l, g_\lambda\rangle] g_\lambda + [\langle g_\lambda, m_l\rangle\langle m_l, \widetilde{g_\lambda}\rangle \\ &\quad + \langle g_\lambda, m'_l\rangle\langle m'_l, \widetilde{g_\lambda}\rangle]\widetilde{g_\lambda} \\ &= \|Q_l(g_\lambda)\|^2 g_\lambda + \langle Q_l(g_\lambda), Q_l(\widetilde{g_\lambda})\rangle \widetilde{g_\lambda}. \end{aligned}$$

Similar calculations show that $P'(Q'_l(\widetilde{g_\lambda})) = \|Q_l(\widetilde{g_\lambda})\|^2 \widetilde{g_\lambda} + \langle Q_l(\widetilde{g_\lambda}), Q_l(g_\lambda)\rangle g_\lambda$.

Then the contractions $C_l, \quad l = 1, \ldots, n_i$, are given by the following matrix,

$$C_l = \begin{pmatrix} \|Q_l(g_\lambda)\|^2 & \langle Q_l(\widetilde{g_\lambda}), Q_l(g_\lambda)\rangle \\ \langle Q_l(g_\lambda), Q_l(\widetilde{g_\lambda})\rangle & \|Q_l(\widetilde{g_\lambda})\|^2 \end{pmatrix}. \tag{3.26}$$

The coefficients $c_{st}, s \neq t$, of the matrix C_l tend to 0 when λ tends to ∞ and when λ tends to $-\infty$.

THEOREM (3.27). *For $\lambda \in \mathbb{R}$, the algebra $\widehat{\mathcal{R}}_\lambda$ is isomorphic to $\mathbb{C}^{n_i} \oplus M_{2n_i}(\mathbb{C})$. The isomorphism is given by the following transforms of the generators:*

$$\begin{array}{rcl} B(\lambda) + \widetilde{B}(\lambda) & \mapsto & \left((0, \dots, 0), \left(\sqrt{C_l}\sqrt{C_j}\right)_{l,j=1}^{n_i}\right) \\ Q_j & \mapsto & ((0, \dots, 1, \dots, 0), \mathrm{Diag}(0, \dots, I, \dots, 0)), \end{array}$$

where the matrices C_l are given by Equations (3.26).

THEOREM (3.28). *The local algebra $\widehat{\mathcal{R}}(z_i)$ is isomorphic to a subalgebra of $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{n_i} \oplus M_{2n_i}(\mathbb{C}))$. The isomorphism is given by the following transforms of the generators:*

$$\begin{array}{rcl} B_D + \widetilde{B}_D \mapsto B(\lambda) + \widetilde{B}(\lambda) & \mapsto & \left((0, \dots, 0), \left(\sqrt{C_l}\sqrt{C_j}\right)_{l,j=1}^{n_i}\right), \\ a(z)I & \mapsto & \left((a_1, \dots, a_{n_i}), \mathrm{Diag}(a_1, a_1, a_2, a_2, \dots, a_{n_i}, a_{n_i})\right), \end{array}$$

where the matrices C_l are given by Equations (3.26).

4. Description of the algebra $\widehat{\mathcal{R}}$

Let $\widetilde{D}$ be the compactification of $D \setminus \mathcal{L}$, let $\widetilde{\partial D}$ be the compactification of the set $\partial D \setminus \{z_1, \dots, z_k\}$ and $Y = \widetilde{D} \cup \widetilde{\partial D}$, $X_1 = (-\infty, \infty), \dots, X_k = (-\infty, \infty)$. Denote by $-\infty_i$ and ∞_i the extreme points of the interval X_i, $i = 1, \dots, k$; by $z_{i1}, z_{i2}, \dots, z_{i(n_i)}$ the points of $\widetilde{D}$ and by $z_{i(n_i+1)}, z_{i(n_i+2)}$ the points in $\widetilde{\partial D}$ determined by z_i.

To paste the points of Y with the points of $\partial(\overline{X}_1 \cup \overline{X}_2 \cup \ldots \cup \overline{X}_k)$ (see Figure 1) use the function ζ defined by

$$\begin{array}{rcl} \zeta(-\infty_i) & = & (z_{i1}, z_{i(n_i+1)}, z_{i2}, \dots, z_{i(n_i-1)}, z_{i(n_i+2)}, z_{in_i}), \\ \zeta(\infty_i) & = & (z_{i(n_i+1)}, z_{i1}, z_{i2}, \dots, z_{i(n_i-1)}, z_{in_i}, z_{i(n_i+2)}). \end{array}$$

Let $\mathcal{B} = (\bigcup_{i=1}^{k} \overline{X}_i) \cup_\zeta Y$ and $F_i = X_i \times (\mathbb{C}^{n_i} + M_{2n_i}(\mathbb{C}))$, $i = 1, \dots, k$. Consider the C^* bundle with base space $\mathcal{B}$ and with fibres being the algebras determined by the sets F_i, $i = 1, \dots, k$. Let $\mathcal{S}$ be the algebra of all continuous sections of this bundle.

A section $\sigma \in \mathcal{S}$ is composed by $k+1$ functions: $\sigma_1 \in C(Y)$, $\sigma_2 = (\alpha_1^2, \alpha_2^2) \in C(\overline{X}_1, \mathbb{C}^{n_2} + M_{2n_1}(\mathbb{C})), \dots, \sigma_{k+1} = (\alpha_1^{k+1}, \alpha_2^{k+1}) \in C(\overline{X}_k, \mathbb{C}^{n_k} + M_{2n_k}(\mathbb{C}))$. Functions σ_{i+1} satisfy

$$\lim_{x \to -\infty_i} \alpha_2^{i+1}(x) = \begin{pmatrix} \sigma_1(z_{i1}) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1(z_{i(n_i+1)}) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_1(z_{i(n_i+2)}) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sigma_1(z_{in_i}) \end{pmatrix},$$

$$\lim_{x\to\infty_i} \alpha_2^{i+1}(x) = \begin{pmatrix} \sigma_1(z_{i(n_i+1)}) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1(z_{i1}) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_1(z_{in_i}) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sigma_1(z_{i(n_i+2)}) \end{pmatrix},$$

$$\lim_{x\to-\infty_i} (\alpha_1^{i+1}(x))_1 = \sigma_1(z_{i(n_i+1)}),\ \lim_{x\to-\infty_i} (\alpha_1^{i+1}(x))_{n_i} = \sigma_1(z_{i(n_i+2)}),$$

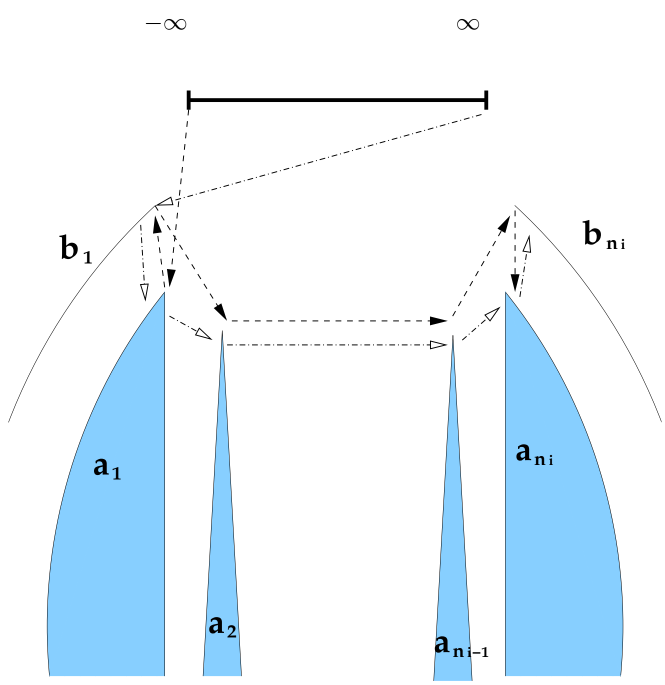

Figure 1. Pasting at the point z_i.

$$\lim_{x\to\infty_i} (\alpha_1^{i+1}(x))_1 = \sigma_1(z_{i(n_i+1)}),\ \lim_{x\to\infty_i} (\alpha_1^{i+1}(x))_{n_i} = \sigma_1(z_{i(n_i+2)}),$$

for $i = 1, \ldots, k$.

The norm in $\mathcal{S}$ is given by

$$\|\sigma\| = \max\left\{ \sup_{y\in Y} |\sigma_1(y)|, \ldots, \sup_{x\in \overline{X}_k} \|\sigma_{k+1}(x)\| \right\}.$$

THEOREM (4.1). *The algebra $\widehat{\mathcal{R}}$ is isomorphic to the algebra $\mathcal{S}$. The isomorphism is given by the following transforms of the generators $A = a(z)I + b(z)(B_D + \widetilde{B}_D) + K$ of $\mathcal{R}$:*

$$\Phi(A) = a(z), \;\; z \in \widetilde{D},$$

$$\Phi(A) = c(z), \;\; z \in \widetilde{\partial D},$$

$$\Phi(A) = ((a_1 + b_1, \ldots, a_{n_i} + b_{n_i}), \mathrm{Diag}(a_1, a_1, \ldots, a_{n_i}, a_{n_i}) \\ + \mathrm{Diag}(b_1, b_1, \ldots, b_{n_i}, b_{n_i})(\sqrt{C_l}\sqrt{C_j})_{l,j=1}^{n_i}),$$

where $c(z) = b(z) + a(z)$ and the contractions C_l, $l = 1, \ldots, n_i, i = 1, \ldots, k$, are given by equations (3.26).

Received April 01, 2004

Final version received September 13, 2004

MARIBEL LOAIZA
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM
AREA DE LA INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA
CIRCUITO EXTERIOR
CIUDAD UNIVERSITARIA
04510, MÉXICO, D.F.
MÉXICO
mloaiza@matem.unam.mx

REFERENCES

[1] S. AXLER, P. BOURDON, W. RAMEY, Harmonic Function Theory, Springer-Verlag, New York, 1992.

[2] J. DAUNS, K. H. HOFMANN, *Representation of rings by sections*, Mem. Amer. Math. Soc. **83**, Providence, RI, 1968.

[3] J. DIXMIER, C^*-algebras, North-Holland Math. Library **15**, North-Holland Publishing Co., Amsterdan-New York-Oxford, 1977.

[4] R. G. DOUGLAS, Banach algebra techniques in operator theory, second edition, Springer, New York, 1998.

[5] M. J. DUPRÉ, *The clasification and structure of C^*-algebra bundles*, Mem. Amer. Math. Soc. **21** (1979), No. 222, i-ix, 1–77.

[6] A. DZHURAEV, Methods of singular integral equations, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 60, 1992.

[7] I. C. GOHBERG, N. KRUPNICK, *One-dimensional linear singular integral equations*, I. Introduction, Oper. Theory Adv. Appl. **53**, Birkhäuser Verlag, Basel, 1992.

[8] K. H. HOFMANN, *Representation of algebras by continuous sections*, Bull. Amer. Math. Soc. **78** (1973), 291–373.

[9] A. N. KARAPETYANTS, V. S. RABINOVICH, N. L. VASILEVSKI, *On algebras of two dimensional singular integral operators with homogeneous discontinuities in symbols*, Integral Equations Operator Theory **40** (3), (2001), 278–308.

[10] T. KATO, Perturbation Theory For Linear Operators, second edition, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 132, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.

[11] M. LOAIZA, *On algebras generated by the Bergman projection and operators of multiplication by piecewise continuous functions*, Integral Equations Operator Theory **46** (2), (2003), 215–234.

[12] M. LOAIZA, *Algebras generadas por la proyección de Bergman y por operadores de multiplicación por funciones continuas a trozos*, Ph. D. Dissertation, CINVESTAV del IPN, Department of mathematics, 2000.

[13] F. OBERHETTINGER, Tables of Mellin Transforms, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1974.

[14] B. A. PLAMENEVSKY, Algebras of Pseudodifferential Operators, Kluwer Academic Publishers, 1989.

[15] I. B. SIMONENKO, *A new general method of investigating linear operator equations of singular integral equation type*, I, (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **29** (1965), 567–586.

[16] J. VARELA, *Duality of C^*-algebras*, Recent advances in the representation theory of rings and C^*-algebras by continuous sections (Sem., Tulane Univ., New Orleans, La., 1973), Mem. Amer. Math. Soc., No. 148 (1974), 97–108.

[17] N. B. VASIL'EV, *C^*-algebras with finite dimensional representation*, Russian Math. Surveys **21** (1966), 135–154.

[18] N. L. VASILEVSKI, *Banach algebras produced by two-dimensional integral operators with a Bergman kernel and Piecewise continuous coefficients I*, Izvestiya VUZ, Matematika **30** (2), (1986), 12–21.

[19] N. L. VASILEVSKI, *Banach algebras produced by two-dimensional integral operators with a Bergman kernel and Piecewise continuous coefficients II*, Izvestiya VUZ, Matematika **30** (3), (1986), 33-38.

[20] N. L. VASILEVSKI, *C*-algebras generated by orthogonal projections and their applications*, Integral Equations Operator Theory **31** (1998), 113-132.

Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) Vol. 10, 2004

LOCAL STRUCTURE AND COPIES OF c_0 AND ℓ_1 IN THE TENSOR PRODUCT OF BANACH SPACES

FERNANDO BOMBAL, MAITE FERNÁNDEZ-UNZUETA, AND IGNACIO VILLANUEVA

ABSTRACT. We use well known properties of the tensor product of ℓ_p-spaces to study the local structure of projective and injective tensor products of Banach spaces. In particular we give a simple proof of the fact that the injective (resp. projective) tensor product of infinite dimensional Banach spaces contains the ℓ_∞^n's (resp., ℓ_1^n's) uniformly complemented. We then refine the previous arguments to give criteria for obtaining copies (complemented or not) of c_0 in the injective tensor product of Banach spaces, and complemented copies of ℓ_1 in the projective tensor product of Banach spaces.

Introduction

It is a well known fact that the tensor product of Banach spaces is a very involved object which, in general, does not respect the Banach space properties of its factors. For instance, neither the projective nor the injective tensor product of two Hilbert spaces is reflexive. There is an intensive literature dealing with the problem of characterizing conditions on the factors which assure that the tensor product has some nice property (reflexivity, RNP, weakly sequential completeness, DPP, and so forth): see [7], [11] and the references therein.

In this paper we study the relationship between the subspace structure of an injective (or projective) tensor product and that of its factors. A result in this direction can be found in [10]: ℓ_∞ is always finitely represented in the space of n-homogeneous polynomials $\mathcal{P}(^nE)$, for any infinite dimensional Banach space E and any $n \geq 2$. In Section 1 we study the case where the factors uniformly contain some ℓ_p^n spaces. In particular Proposition (1.3) below gives rise to an extension of the aforementioned result in [10].

The proofs of the results in Section 1 exploit systematically the well known properties of projective and injective tensor products of ℓ_p spaces, so they become simple and clear. This allows us to refine our arguments to obtain in Section 2 the main results of the paper. Namely, the existence of copies (complemented or not) of c_0 in the injective tensor product, and complemented copies of ℓ_1 in the projective tensor product (see Theorem (2.1), Proposition (2.3) and Proposition (2.5)).

2000 *Mathematics Subject Classification*: 46B20.

First and third authors are partially supported by DGICYT grant BFM2001-1284.
Second author partially supported by Conacyt Grants J 32150-E and 37979-E.
Partially supported by DGAPA-PAPIIT IN101303.

1. The containment of ℓ_p^n's in tensor products

The structure of the tensor products of ℓ_p spaces is now well known. We shall exploit this knowledge in order to get information about the structure of the projective and injective tensor product of Banach spaces. In the following Theorem we collect the results that we shall use repeatedly throughout the paper. First, we need some notation. We shall call two equivalent basic sequences (e_n) and (u_n) *similar* if the canonical isomorphism between the closed subspaces generated by them (which takes e_n into u_n) is an isometry. With this notation at hand, we have the following well known facts:

PROPOSITION (1.1). *Let $1 < p, q < \infty$ and let $(e_n)_n$ and $(f_n)_n$ denote respectively the canonical bases of ℓ_p and ℓ_q.*

1. *$(e_n \otimes f_n)_n$ is an unconditional basic sequence in the projective tensor product $\ell_p \hat{\otimes}_\pi \ell_q$, similar to the canonical basis of ℓ_r, where $\frac{1}{r} = \min\{1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\}$, and it spans a 1-complemented subspace.*
2. *$(e_n \otimes f_n)_n$ is an unconditional basic sequence in the injective tensor product $\ell_p \check{\otimes}_\epsilon \ell_q$, which spans a 1-complemented subspace and is similar to*
   i) the canonical basis of c_0, if $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1$.
   ii) the canonical basis of ℓ_r, if $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$ and $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$.

The result for projective tensor products is explicitly stated in [2], Theorem 1.3 (in a general version for the product of more than two ℓ_p spaces), and the corresponding result for injective tensor products is implicit in the proof of [12], Theorem 5.5. It is also easy to see that the result remains true if we replace ℓ_p, ℓ_q and ℓ_r by ℓ_p^n, ℓ_q^n and ℓ_r^n, for any $n \in \mathbb{N}$.

If E and F are Banach spaces, their Banach-Mazur distance $d(E, F)$ is defined by

$$d(E, F) = \inf\{\|T\|\|T^{-1}\|;\ \text{where } T \text{ is an isomorphism from } E \text{ onto } F\}.$$

We say that a Banach space E contains the ℓ_p^n's λ-uniformly (for $\lambda > 1$ and $1 \leq p \leq \infty$) if there is a sequence of subspaces $E_n \subset E$ such that

$$\sup_n d(E_n, \ell_p^n) \leq \lambda.$$

We say that E contains the ℓ_p^n's uniformly if it contains the ℓ_p^n's λ-uniformly for some $\lambda > 1$. It is well known that in this case E contains the ℓ_p^n's μ-uniformly for *every* $\mu > 1$ (for $p = 1, \infty$, the only case we need, the result goes back to [14]; for the general case, see [15], Th. 10.5). We shall freely use this fact throughout the paper, without any explicit reference.

We say that E contains the ℓ_p^n's λ-uniformly complemented if there is a sequence of subspaces $E_n \subset E$ and a sequence of projections $P_n : E \longrightarrow E_n$ such that

$$\sup_n d(E_n, \ell_p^n) \leq \lambda \text{ and } \sup_n \|P_n\| \leq \lambda.$$

PROPOSITION (1.2). *Let E, F be Banach spaces and let $M \subset E$, $N \subset F$ be n-dimensional subspaces such that $d(M, \ell_p^n) \leq \lambda$, $d(N, \ell_q^n) \leq \mu$ $(1 < p, q < \infty)$. Then $E \check{\otimes}_\epsilon F$ contains an n-dimensional subspace L such that $d(L, \ell_r^n) \leq \lambda \cdot \mu$, where $\frac{1}{r} = \max\{0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1\}$.*

Proof. First of all, let us notice that $M\check{\otimes}_\epsilon N$ is a subspace of $E\check{\otimes}_\epsilon F$ ([13], Prop. 16.2.1). By hypothesis, there are isomorphisms $u : \ell_p^n \to M,\ v : \ell_q^n \to N$ such that $\|u\| \cdot \|u^{-1}\| \leq \lambda,\ \|v\| \cdot \|v^{-1}\| \leq \mu$. Proposition (1.1) (2) proves that the subspace D spanned by the diagonal basis in $\ell_p^n\check{\otimes}_\epsilon\ell_q^n$ is isometric to ℓ_r^n. It suffices to take $L := (u \otimes v)(D)$. □

The above Proposition, with the same proof, is also valid when M and N are infinite dimensional subspaces. We have only to substitute ℓ_∞ by c_0 when $r = \infty$. The same remark applies to the following result:

PROPOSITION (1.3). *Let $E_1, \ldots, E_k$ be Banach spaces such that E_i contains an n-dimensional subspace M_i with $d(M_i, \ell_{p_i}^n) \leq \lambda_i$. Then, whenever there exist indices $1 \leq i_1 < \ldots < i_j \leq k$ such that $\frac{1}{r} = \max\{0, \frac{1}{p_{i_1}} + \ldots + \frac{1}{p_{i_j}} - (j-1)\}$, the space $E_1\check{\otimes}_\epsilon \ldots \check{\otimes}_\epsilon E_k$ contains an n-dimensional subspace L such that $d(L, \ell_r^n) \leq \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_j}$.*

Proof. It suffices to note that $E_{i_1}\check{\otimes}_\epsilon \ldots \check{\otimes}_\epsilon E_{i_j}$ is (isometric to) a subspace of $E_1\check{\otimes}_\epsilon \ldots \check{\otimes}_\epsilon E_k$ and to apply the above proposition and induction on j. □

The classical Dvoretzki theorem states that every infinite dimensional Banach space contains the ℓ_2^n's $(1+\epsilon)$-uniformly, for every $\epsilon > 0$. This together with Proposition (1.3) gives:

COROLLARY (1.4). *Let $E, E_1, \ldots, E_k$ be infinite dimensional Banach spaces. For every $\epsilon > 0$, $E_1\check{\otimes}_\epsilon \ldots \check{\otimes}_\epsilon E_k$ and $\check{\otimes}_{s,\epsilon}^k E$ contain the ℓ_∞^n's $1 + \epsilon$ uniformly complemented.*

Proof. In order to justify the second part of the statement, we must only note that $\check{\otimes}_{s,\epsilon}^2 E$ is isomorphic to a (complemented) subspace of $\check{\otimes}_{s,\epsilon}^k E$ (this was proved in [5] for the projective topology, but, as mentioned in [1], the proof can be easily adapted to hold for the injective topology), and that the copies given by proposition (1.2) are spanned by diagonal elements, and so they are formed by symmetric tensors. Finally, it is an easy consequence of the Hahn-Banach theorem that whenever a Banach space contains the ℓ_∞^n's λ-uniformly, it contains them λ-uniformly complemented. □

COROLLARY (1.5). *If E and F are infinite dimensional Banach spaces, then $E\check{\otimes}_\epsilon F$ and $\check{\otimes}_{s,\epsilon}^k E$ have no finite cotype (and, consequently, trivial type).*

COROLLARY (1.6). *Let $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, and $\epsilon > 0$. For all $E, E_1, \ldots, E_k$ infinite dimensional Banach spaces, $\mathcal{L}^k(E_1, \ldots, E_k)$ and $\mathcal{P}(^kE)$ contain the ℓ_∞^n's $1 + \epsilon$ uniformly complemented.*

Proof. It is known that $E_1^*\check{\otimes}_\epsilon \ldots \check{\otimes}_\epsilon E_k^*$ is a subspace of $(E_1\hat{\otimes}_\pi \ldots \hat{\otimes}_\pi E_k)^* = \mathcal{L}^k(E_1, \ldots, E_k)$ and $\check{\otimes}_{s,\epsilon}^k E^*$ is a subspace of $(\hat{\otimes}_{s,\pi}^k E)^* = \mathcal{P}(^kE)$. The result follows immediately from Corollary (1.4). □

In [10], Corollary 3, the author proves the polynomial statement of the previous corollary. The main result of that paper can be restated as follows: *If E^* contains an n-dimensional subspace isomorphic to ℓ_p^n and $n \geq q$ (where $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), then $\check{\otimes}_{s,\epsilon}^n E^*$ contains an n-dimensional subspace (spanned by the* *diagonal of the ℓ_p^n's) isomorphic to ℓ_∞^n.* In this form, we see that this is a very particular case of our Proposition (1.3), since the condition $n \geq q$ is equivalent to $\frac{n}{p} \leq n-1$.

The above line of reasoning can be used to obtain information about the structure of the *projective* tensor product. We need the following finite dimensional version of a well known result (see [8], Theorem VII.5; the proof is the same):

LEMMA (1.7). *Let E be a Banach space, $n \in \mathbb{N}$ and let $T : E \longrightarrow \ell_1^n$ be a surjective operator. Then for every $\epsilon > 0$, ℓ_1^n is $(\|T\|^2 + \epsilon)$-complemented in E.*

By using this we can give a very easy proof of the next (well known) Proposition:

PROPOSITION (1.8). *A Banach space E contains the ℓ_1^n's uniformly complemented if and only if E^* contains the ℓ_∞^n's uniformly (complemented).*

Proof. Given $n \in \mathbb{N}$, let $S : \ell_\infty^n \to E^*$ be an isomorphism into with $\|S\| \leq C$. Then $S^* : E^{**} \to \ell_1^n$ is onto and, since S is weakly compact, $S^* \circ J : E \to \ell_1^n$ is also onto (where J is the canonical injection of E into E^{**}). Lemma (1.7) yields a $(C^2 + \epsilon)$-complemented copy of ℓ_1^n in E. □

From this result and Corollary (1.4) we get immediately:

PROPOSITION (1.9). *Let $E, E_1, \ldots, E_k$ be infinite dimensional Banach spaces. Then, for every $\epsilon > 0$, $E_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi E_k$ and $\hat{\otimes}_{s,\pi}^k E$ contain the ℓ_1^n's $1+\epsilon$ uniformly complemented.*

Proof. As mentioned before, $E_1^* \check{\otimes}_\epsilon \ldots \check{\otimes}_\epsilon E_k^*$ (resp., $\check{\otimes}_{s,\epsilon}^k E^*$) is a subspace of $(E_1 \hat{\otimes}_\pi \ldots \hat{\otimes}_\pi E_k)^*$ (resp., $(\hat{\otimes}_{s,\pi}^k E)^*$). □

COROLLARY (1.10). *If E and F are infinite dimensional Banach spaces then $E \hat{\otimes}_\pi F$ and $\hat{\otimes}_{s,\pi}^k E$ do not have non-trivial type.*

2. Copies of c_0 and ℓ_1 in tensor products

We can refine the arguments of the preceding Section to assure the existence of copies of c_0 in the injective tensor product:

THEOREM (2.1). *Let $k > 1$ and $E_1, \ldots, E_k$ be Banach spaces. Suppose that for some $q_1, \ldots, q_k > 1$ such that $\frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_k} \leq (k-1)$, there exist noncompact linear operators $T_i \in \mathcal{L}(\ell_{q_i}, E_i)$, $1 \leq i \leq k$. Then $E_1 \check{\otimes}_\epsilon \ldots \check{\otimes}_\epsilon E_k$ has a subspace which is isomorphic to c_0.*

Proof. We give the proof for $k = 2$. The proof of the general case $k > 1$ follows in a similar manner. Observe first that if there exists a non compact operator $T_1 \in \mathcal{L}(\ell_{q_1}, E_1)$, it is possible to construct another operator such that the image (x_i) of the canonical basis $(e_i)_i$ of ℓ_{q_1} (a weakly null sequence) has no norm convergent subsequences. Normalizing and passing to a subsequence if necessary, we can suppose that (x_i) is also a normalized basic sequence in E_1. We assume in the sequel this property is already satisfied by T_1 and T_2. Proposition (1.1) (2) proves that the diagonal basis $(e_i \otimes e_i)$ is similar to the canonical basis of c_0. If $a_1, \dots, a_n$ are scalars, and we denote by (y_i) the image of the canonical basis of ℓ_{q_2} by T_2, we have

$$\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \otimes y_i\| \leq \|T_1 \otimes T_2\| \|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i \otimes e_i\| \leq \|T_1\|\|T_2\| \sup\{|a_i| : 1 \leq i \leq n\}.$$

Since $(x_i \otimes y_i)$ is a basic sequence ([12]), this proves that it is equivalent to the canonical basis of c_0. □

Let us observe that the sequence (x_i) above satisfies an upper q_1 estimate, and every normalized, weakly null sequence verifying an upper q estimate is the image of the canonical basis of ℓ_q through a noncompact operator. Hence if we apply the above theorem to $E_1 = \dots = E_k = E^*$, we obtain in particular [10], Proposition 6.

On the other hand, by the separable injectivity of c_0 ([8], Theorem VII.4), it is clear that if all the E_i are separable, the copy of c_0 given by Theorem (2.1) is *complemented*. This also happens in the general case under some mild conditions: Recall that a subset K of a Banach space is said to be *limited* if for every weak* null sequence $(x_n^*) \subset E^*$ we have

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|x_n^*(x)| x \in K\} = 0.$$

Limited sets were introduced by Köthe in 1938, but their systematic study and applications in Banach space theory starts with the paper [3]. Ascoli's theorem yields that every relatively norm compact set is limited. The converse is not true in general. The Banach spaces such that every limited set is relatively norm compact are called *Gelfand-Phillips* spaces, and this class contains all the separable and all the reflexive spaces. Limited sets are pertinent to our question because of the following result of [16] (we include a proof for the sake of completeness):

PROPOSITION (2.2). *Let (u_n) be a basic sequence in a Banach space E, equivalent to the usual basis of c_0. Then there exists a subsequence of (u_n) spanning a complemented subspace if and only if the set $K := \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ is not limited.*

Proof. If K is not limited, there exist a weak* null sequence $(x_n^*) \subset E^*$, a $\delta > 0$ and a subsequence of (u_n), denoted in the same way for simplicity, such that $|x_n^*(u_n)| \geq \delta,\ \forall n$. Put $x_n := \frac{u_n}{x_n^*(u_n)}$. Then (x_n) is equivalent to (u_n) and $x_n^*(x_n) = 1\ \forall n$. Since $(x_n^*(x)) \in c_0$ for every $x \in E$, the map $P(x) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x) x_n$ is a well defined, continuous linear projection on the subspace (isomorphic to c_0) spanned by (x_n).

Conversely, if (u_n) spans a complemented subspace, there is a continuous operator $T : E \to c_0$ such that $T(u_n) = e_n$ for every n, Then $T^*(e_n^*) := u_n^* \in E^*$ is a weak* null sequence such that $u_n^*(u_n) = 1\ \forall n$. □

With this result at hand, we can characterize when the copy of c_0 in Theorem (2.1) is complemented:

PROPOSITION (2.3). *Under the assumptions and notations of Theorem (2.1), the following statements are equivalent:*

a) *There exists a subsequence of $(T_1(e_i) \otimes \cdots \otimes T_k(e_i))_i$ which spans a complemented subspace (isomorphic to c_0).*

b) *At least one of the sequences* $(T_j(e_i))_{i=1}^{\infty}$ *is not limited.*

Proof. Again, we shall give the proof for the case $k = 2$. We also denote by (x_i) and (y_i) the images of the canonical basis of ℓ_{q_1} and ℓ_{q_2} by T_1 and T_2, respectively. In view of Proposition (2.2) it suffices to prove that the sequence $(x_i \otimes y_i)$ is not limited if and only if one at least of the factor sequences is not limited. Suppose first, for instance, that (x_i) is not limited. Then, passing to a subsequence and normalizing if necessary, we can get a weak* null sequence $(x_i^*) \subset E_1^*$ such that $x_i^*(x_i) = 1$ for all i. Let $(y_i^*) \subset E_2^*$ be a bounded orthogonal sequence to (y_i) and let us define $\varphi_i := x_i^* \otimes y_i^* \in E_1^* \otimes E_2^* \subset (E_1 \check{\otimes}_\epsilon E_2)^*$. Obviously, $\lim_{i\to\infty} \varphi_i(u) = 0$ for every tensor $u \in E_1 \otimes E_2$. Since (φ_i) is bounded ($\|\varphi_i\| = \|x_i^*\| \cdot \|y_i^*\|$), this proves that (φ_i) is weak* null in $(E_1 \check{\otimes}_\epsilon E_2)^*$. On the other hand, $\varphi_i(x_i \otimes y_i) = 1$ for all i, which proves that $\{x_i \otimes y_i : i \in \mathbb{N}\}$ is not limited.

Conversely, if (x_i) and (y_i) are both limited sequences, [4], Lemma 4 proves that $(x_i \otimes y_i)$ is limited in $E_1 \hat{\otimes}_\pi E_2$ and, consequently, in $E_1 \check{\otimes}_\epsilon E_2$. □

Remark. 1.- In terms of the operators T_i we can reformulate Proposition (2.3) by imposing that all the T_i be noncompact operators and at least one is not limited (in the sense that it transforms the unit ball in a non limited set). Under the hypothesis of Theorem (2.1), this is always the case if at least one of the spaces E_i is a Gelfand-Phillips space.

2.- If (e_i) is the canonical basis of c_0, it is well known that $(e_i \otimes e_i)$ is similar to (e_i) in $c_0 \check{\otimes}_\epsilon c_0$ ([12], Proposition 1), hence in $\ell_\infty \check{\otimes}_\epsilon \ell_\infty$. Proposition (2.3) above proves that the subspace spanned by $(e_i \otimes e_i)$ in this latter space is not complemented, since (e_i) is limited in ℓ_∞. However, $\ell_\infty \check{\otimes}_\epsilon \ell_\infty \approx C(\beta\mathbb{N}, \ell_\infty)$ contains a complemented copy of c_0, by a well known result of Cembranos ([6]). Let us note also that $(e_i \otimes e_i)$ spans a complemented subspace in $\ell_\infty \check{\otimes}_\epsilon c_0$.

The same proof of Proposition (2.3) provides also a criterion for obtaining complemented copies of c_0 in projective tensor products:

PROPOSITION (2.4). *Let* $E_1, \ldots, E_k$ *be Banach spaces and let* $(x_n^i)_{n=1}^{\infty} \subset E_i$ $(1 \leq i \leq k)$ *be weakly null sequences such that* $(x_n^1 \otimes \cdots \otimes x_n^k)_{n=1}^{\infty}$ *is a basic sequence equivalent to the usual basis of* c_0 *in* $E_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi E_k$. *There exists a subsequence of* $(x_n^1 \otimes \cdots \otimes x_n^k)$ *spanning a complemented subspace if and only if one at least of the sequences* (x_n^i) *is not limited.*

If we apply the well known infinite dimensional version of Proposition (1.8) (see [8], Theorem V.10) together with Theorem (2.1), we obtain the following criterion for the containment of complemented copies of ℓ_1 in projective tensor products:

PROPOSITION (2.5). *Let* $k > 1$ *and* $E_1, \ldots, E_k$ *be Banach spaces. Suppose that for some* $p_1, \ldots, p_k > 1$ *such that* $\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_k} \geq 1$, *there exist non compact linear operators* $T_i \in \mathcal{L}(E_i, \ell_{p_i})$, $1 \leq i \leq k$. *Then,* $E_1 \hat{\otimes}_\pi \ldots \hat{\otimes}_\pi E_k$ *has a complemented subspace which is isomorphic to* ℓ_1.

Proof. If $\frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i} = 1$, the hypothesis is equivalent to $\frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_k} \leq (k-1)$, and Schauder's Theorem proves that $T_i^* : \ell_{q_i} \to E_i^*$, $(1 \leq i \leq k)$ are non compact operators. Theorem (2.1) yields that $E_1^*\check{\otimes}_\epsilon \dots \check{\otimes}_\epsilon E_k^* \subset (E_1\hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi E_k)^*$ contains a copy of c_0 and, consequently, $E_1\hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi E_k$ contains a complemented copy of ℓ_1. □

An important case of Proposition (2.5) is the following (known) result:

COROLLARY (2.6). *Let E and F be Banach spaces which contain a subspace isomorphic to ℓ_1. Then their projective tensor product $E\hat{\otimes}_\pi F$ contains a complemented subspace isomorphic to ℓ_1.*

Proof. Since E and F contain a copy of ℓ_1, there exist surjective, and hence non compact, operators $T \in \mathcal{L}(E, \ell_2)$ and $S \in \mathcal{L}(F, \ell_2)$ (see [9], Corollary 4.16). It is now sufficient to apply the previous proposition with the parameters $p_1 = p_2 = 2$. □

Received May 20, 2004

Final version received August 05, 2004

F. Bombal
Departamento de Análisis Matemático
Facultad de Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
MADRID 28040
Fernando_Bombal@mat.ucm.es

M. Fernández-Unzueta
CIMAT
A.P. 402
36000 Guanajuato, Gto.
México
maite@cimat.mx

I. Villanueva
Departamento de Análisis Matemático
Facultad de Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
MADRID 28040
ignacio_villanueva@mat.ucm.es

References

[1] J. M. Ansemil and K. Floret, *The symmetric tensor product of a direct sum of locally convex spaces*, Studia Math. **129** (3), (1998), 285–295.

[2] A. Arias and J.D. Farmer, *On the structure of tensor products of ℓ_p spaces*, Pacific J. Math. **175** (1), (1996), 13–37.

[3] J. Bourgain and J. Diestel, *Limited operators and strict cosingularity*, Math. Nachr. **119** (1984), 55–58.

[4] F. Bombal and G. Emmanuele, *Remarks on completely continuous polynomials*, Quaestiones Math. **20** (1997), 85–93.

[5] F. Blasco, *Complementation of symmetric tensor products and polynomials*, Studia Math. **123** (1997), 165–173.

[6] P. Cembranos, *$C(K, E)$ contains a complemented copy of c_0*, Proc. Amer. Math. Soc. **91** (1984), 556–558.

[7] A. DEFANT AND K. FLORET, Tensor norms and Operator Ideals, North Holland Math. Studies, **176**, 1993.
[8] J. DIESTEL, Sequences and Series in Banach Spaces, Grad. Texts in Math. **92**, Springer, Berlin 1984.
[9] J. DIESTEL, H. JARCHOW, A. TONGE, Absolutely summing operators, Cambridge Stud. Adv. Math. **43**, Cambridge University Press, Cambridge 1995.
[10] S. DINEEN, *A Dvoretsky-Rogers theorem for polynomials*, Proc. Amer. Math. Soc. **123** (9), (1995), 2817–2821.
[11] S. DINEEN, Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces, Springer Monographs in Mathematics, Springer, 1999.
[12] J. R. HOLUB, *Tensor product bases and tensor diagonals*, Trans. Amer. Math. Soc. **151** (1970), 563–579.
[13] H. JARCHOW, Locally Convex Spaces, B. G. Teubner, Stuttgart, 1981.
[14] R. C. JAMES, *Uniformly non-square Banach spaces*, Ann. Math. **80** (1964), 542–550.
[15] V. D. MILMAN AND G. SCHECHTMAN, Asymptotic Theory of Finite Dimensional Normed Spaces. Lect. Notes in Math., 1.200. Springer, Berlin, 1986.
[16] T. SCHLUMPRECHT, Limitierte Mengen in Banachraumen, Thesis, Ludwig Maximiliam-Universität, München, 1988.

Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) Vol. 10, 2004

AN EXAMPLE OF A σ-COMPACT MONOTHETIC GROUP WHICH IS NOT COMPACTLY GENERATED

MIKHAIL TKACHENKO AND YOLANDA TORRES FALCÓN

ABSTRACT. We construct a countable (hence, σ-compact) monothetic topological group G which is not compactly generated, thus answering in the negative a question posed by Fujita and Shakhmatov. In addition, our group G is precompact and sequentially complete.

1. Introduction

In [6], Fujita and Shakhmatov proved that a σ-compact metric group which contains a dense compactly generated subgroup is itself compactly generated. They wondered whether being metric was an essential condition. More specifically, they put forward the following question (see [6], Question 2.7):

Let G be a σ-compact topological group satisfying one of the following conditions:

(i) G has a dense compactly generated subgroup;
(ii) G has a dense finitely generated subgroup;
(iii) G is monothetic.

Must then G be compactly generated?

Obviously, if the answer to (iii) is 'No', then the answer to all three questions is 'No'. In this paper we answer all these questions in the negative by constructing a countable monothetic topological group G which is not compactly generated. It turns out that our group G is precompact and sequentially complete.

Recall that if G is a group and $X \subseteq G$, then $\langle X\rangle$ is the smallest subgroup of G which contains X. A topological group G is said to be:

(a) *σ-compact* if $G = \bigcup\{K_n : n \in \omega\}$, where each K_n is compact;
(b) *compactly generated* if $G = \langle K\rangle$ for some compact $K \subseteq G$;
(c) *monothetic* if G contains a dense cyclic subgroup.

In what follows $\mathbb{T}$ will denote the circle group, that is, the quotient group $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ with the quotient topology. Let $\pi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ be the natural projection, $\pi(r) = r + \mathbb{Z}$ for each $r \in \mathbb{R}$. We will use the symbol $[r]$ instead of $\pi(r)$. Then π is a continuous open homomorphism of $\mathbb{R}$ onto $\mathbb{T}$. For any $r, s \in \mathbb{R}$, put

$$d([r],[s]) = \min\{|r - s - n| : n \in \mathbb{Z}\}.$$

2000 *Mathematics Subject Classification*: Primary 54A20; 54B10; 54H11. Secondary 54D30; 54D45; 22D05.

Keywords and phrases: topological group, compactly generated, monothetic, σ-compact, precompact, Bohr topology, sequentially complete.

It is easy to verify that d is an invariant metric on the group $\mathbb{T}$ which generates the quotient topology of $\mathbb{T}$.

2. Preliminary results

In this section we present some results about $\mathbb{T}$ and $\mathbb{T}^{\mathfrak{c}}$, where $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ is the cardinality of the continuum. We also introduce the Bohr topology of an arbitrary Abelian group G and state some well known results about it.

The first lemma is a very basic result about $\mathbb{Q}$-independent sets of real numbers. Recall that a set $A \subseteq \mathbb{R}$ is *$\mathbb{Q}$-independent* if for every pairwise distinct elements $a_1, \ldots, a_n \in A$ and $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{Q}$, the equality

$$q_1 a_1 + \cdots + q_n a_n = 0$$

implies $q_i = 0$ for every $i = 1, \ldots, n$. Clearly, if $A \subseteq \mathbb{R}$ is $\mathbb{Q}$-independent, then $a \neq 0$ for each $a \in A$.

LEMMA (2.1). *If $\{r_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ is a $\mathbb{Q}$-independent set of pairwise distinct real numbers and we define $t \in \mathbb{T}^{\mathfrak{c}}$ as $t(\alpha) = [r_\alpha]$ for every $\alpha < \mathfrak{c}$, then $\langle t \rangle$, the cyclic subgroup of $\mathbb{T}^{\mathfrak{c}}$ generated by t, is dense in $\mathbb{T}^{\mathfrak{c}}$.*

Proof. Take an arbitrary point $x = (x_\alpha)_{\alpha<\mathfrak{c}} \in \mathbb{T}^{\mathfrak{c}}$ and let U be a canonical open subset of $\mathbb{T}^{\mathfrak{c}}$ such that $x \in U$. Then $U = \bigcap\{p_{\alpha_i}^{-1}(V_i) : 1 \leq i \leq n\}$, with V_i open in $\mathbb{T}$, where $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n < \mathfrak{c}$ and

$$p_{\alpha_i} : \mathbb{T}^{\mathfrak{c}} \to \mathbb{T}$$

is the projection to the α_ith factor. Therefore, for each $i = 1, \ldots, n$ there exists $\epsilon_i > 0$ such that $B_{\epsilon_i}(x_{\alpha_i}) \subseteq V_i$, where

$$B_{\epsilon_i}(x_{\alpha_i}) = \{x \in \mathbb{T} : d(x, x_{\alpha_i}) < \epsilon_i\}$$

is the arc of radius ϵ_i and center x_{α_i}. Let $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\} > 0$. For every $\alpha < \mathfrak{c}$, choose $s_\alpha \in \mathbb{R}$ such that $[s_\alpha] = x_\alpha$. Applying Kronecker's approximation theorem, we obtain $q \in \mathbb{Z}$ and $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{Z}$ such that $|qr_{\alpha_i} - p_i - s_{\alpha_i}| < \epsilon$ for $i = 1, \ldots, n$. This implies, by our choice of ϵ, that

$$d([qr_{\alpha_i}], [p_i + s_{\alpha_i}]) = d([qr_{\alpha_i}], [s_{\alpha_i}]) < \epsilon_i$$

for every $i = 1, \ldots, n$. We have proved that $qt(\alpha_i) = [qr_{\alpha_i}] \in B_{\epsilon_i}(x_{\alpha_i}) \subseteq V_i$ for every $i = 1, \ldots, n$. Hence $qt \in U$ and $\langle t \rangle \cap U \neq \emptyset$. □

LEMMA (2.2). *Let a sequence $\{(a_i, m_i) : i \in \omega\} \subseteq \mathbb{T} \times \mathbb{Z}$ be such that the set $\{m_i : i \in \omega\}$ is infinite. Then the set*

$$D = \{t \in \mathbb{T} : \{a_i + m_i t\}_{i \in \omega} \text{ is dense in } \mathbb{T}\}$$

is the intersection of a countable family of open dense subsets of $\mathbb{T}$.

Proof. Let $\{s_n : n \in \omega\}$ be a dense subset of $\mathbb{T}$. For each $n \in \omega$, let

$$U_n = \{t \in \mathbb{T} : \text{there exists } i \in \omega \text{ such that } d(a_i + m_i t, s_n) < 2^{-n}\}.$$

Clearly U_n is open in $\mathbb{T}$ for every $n \in \omega$. We claim that each U_n is dense in $\mathbb{T}$. Indeed, let V be a nonempty open subset of $\mathbb{T}$. Since the set $\{m_i : i \in \omega\}$ is infinite, there exists $i \in \omega$ such that $m_i \cdot V = \mathbb{T}$. Pick $t_0 \in V$ such that $m_i \cdot t_0 = s_n - a_i$. Then $a_i + m_i t_0 = s_n$ and hence $t_0 \in V \cap U_n \neq \emptyset$.

Finally, let us prove that $D = \bigcap\{U_n : n \in \omega\}$. If $t \in \bigcap\{U_n : n \in \omega\}$ then, for every $n \in \omega$, there exists $i \in \omega$ such that $d(a_i + m_i t, s_n) < 2^{-n}$. This implies that the set $\{a_i + m_i t : i \in \omega\}$ is dense in $\mathbb{T}$ and therefore $t \in D$. On the other hand, if $t \in D$, then the set $\{a_i + m_i t : i \in \omega\}$ is dense in $\mathbb{T}$. Hence, for every $n \in \omega$ there exists $i \in \omega$ such that $d(a_i + m_i t, s_n) < 2^{-n}$. Thus $t \in \bigcap\{U_n : n \in \omega\}$ and the proof is complete. □

For our construction we also need some facts about the Bohr topology on an Abelian group G. We finish this section by stating the definition and some results about this topology.

Given an arbitrary Abelian group G, we consider on G the coarsest group topology which makes every homomorphism $\phi\colon G \to \mathbb{T}$ continuous (see [1] and [7] for the definition of this topology and a discussion of its properties). We refer to this topology as the Bohr topology of G because it coincides with the Bohr topology of the group G endowed with the discrete topology. The symbol $G^{\#}$ denotes the group G equipped with the Bohr topology.

If F is the family of all group homomorphisms $\phi\colon G \to \mathbb{T}$, then F separates the points of G and the diagonal product φ of the family F,

$$\varphi\colon G^{\#} \to \mathbb{T}^{|F|},$$

is a topological embedding. Hence $G^{\#}$ is a totally bounded Hausdorff topological group. Another important property of $G^{\#}$ is that all compact subsets of $G^{\#}$ are finite (see [2] or [7] for a proof of this fact).

3. Construction of the group

Subgroups of compact topological groups are said to be *precompact*. We recall that a topological group G is *sequentially complete* if no sequence in G converges to an element of $\tilde{G} \setminus G$, where $\tilde{G}$ is the Raĭkov completion of G (see [3]).

EXAMPLE (3.1). *There exists a countable monothetic abelian group G which is not compactly generated. In addition, the group G is precompact and sequentially complete.*

Construction. Consider $\mathbb{Z}^{(\omega)}$, the direct sum of countably many copies of the group of integers $\mathbb{Z}$. We equip $\mathbb{Z}^{(\omega)}$ with the Bohr topology and define

$$H = (\mathbb{Z}^{(\omega)})^{\#}.$$

Note that the family F of all homomorphisms from $\mathbb{Z}^{(\omega)}$ to $\mathbb{T}$ has cardinality $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ so the diagonal product φ of F,

$$\varphi\colon H \to \mathbb{T}^{\mathfrak{c}},$$

is a topological embedding and therefore H is a subgroup of $\mathbb{T}^{\mathfrak{c}}$. Since H is equipped with the Bohr topology, all its compact subsets are finite. We also know that H is countable and not finitely generated. Write H as

$$H = \{h_n : n \in \omega\}.$$

By recursion of length $\mathfrak{c}$ we are going to define an element $t = (t_\alpha)_{\alpha<\mathfrak{c}} \in \mathbb{T}^{\mathfrak{c}}$ such that, if K is the cyclic subgroup of $\mathbb{T}^{\mathfrak{c}}$ generated by t and $\overline{0}$ is the neutral element of $\mathbb{T}^{\mathfrak{c}}$, then:

(1) $H \cap K = \{\bar{0}\}$, and

(2) the subgroup $H + K$ of $\mathbb{T}^{\mathfrak{c}}$ does not contain non-trivial convergent sequences.

To do this we need to define some sets. Let P and Q denote the set of all functions from ω to H and $\mathbb{Z}$, respectively. Then $|P| = |Q| = \mathfrak{c}$. Now let $A = P \times Q$, then $|A| = \mathfrak{c}$, so we can write A as

$$A = \{(H_\alpha, I_\alpha) : 1 \leq \alpha < \mathfrak{c}\},$$

where $H_\alpha \in P$ and $I_\alpha \in Q$ for each α.

We are ready to construct an element $t = (t_\alpha)_{\alpha<\mathfrak{c}} \in \mathbb{T}^{\mathfrak{c}}$ by defining the coordinates $t_\alpha \in \mathbb{T}$ by recursion on $\alpha < \mathfrak{c}$.

Denote by T_0 the subgroup of $\mathbb{T}$ generated by the set

$$\{t \in \mathbb{T} : mt = h_n(0) \text{ for some } m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \text{ and } n \in \omega\}.$$

Then T_0 is countable, and therefore we can choose $t_0 \in \mathbb{T}$ such that $t_0 \neq 0$ and $\langle t_0 \rangle \cap T_0 = \{0\}$.

Let us take an arbitrary β with $1 \leq \beta < \mathfrak{c}$ and assume that the set $\{t_\nu : \nu < \beta\} \subseteq \mathbb{T}$ has been defined. Let T_β be the subgroup of $\mathbb{T}$ generated by the set

$$\{t \in \mathbb{T} : mt = t_\nu \text{ for some } m \in \mathbb{Z} \text{ and } \nu < \beta\}.$$

Then $|T_\beta| \leq |\beta| \cdot \omega < \mathfrak{c}$. Consider the βth element (H_β, I_β) of A. Put $x_n = H_\beta(n)$ and $m_n = I_\beta(n)$ for every $n \in \omega$. Since $x_n \in H \leq \mathbb{T}^{\mathfrak{c}}$, it follows that $(x_n(\beta), m_n) \in \mathbb{T} \times \mathbb{Z}$ for every $n \in \omega$.

Case 1. The image of I_β is infinite.

We can apply Lemma (2.2) to conclude that

$$D_\beta = \{t \in \mathbb{T} : \{x_n(\beta) + m_n t\}_{n\in\omega} \text{ is dense in } \mathbb{T}\}$$

is a dense G_δ-set in $\mathbb{T}$. Since $\mathbb{T}$ is compact and D_β is of type G_δ in $\mathbb{T}$, the space D_β is completely metrizable and has no isolated points. Therefore D_β contains a copy of the Cantor set, which implies that $|D_\beta| = 2^{\aleph_0}$. Hence we can pick a point $t_\beta \in D_\beta \setminus T_\beta$.

Notice that with this choice the sequence $x_n(\beta) + m_n t_\beta$ does not converge in $\mathbb{T}$.

Case 2. The image of I_β is finite.

If the sequence $(m_n)_{n\in\omega}$ is eventually 0, we choose any $t_\beta \in \mathbb{T} \setminus T_\beta$. If not, then there is a subsequence of $(m_n)_{n\in\omega}$ which has constant value m with $m \neq 0$. In this case we can always choose $t_\beta \in \mathbb{T} \setminus T_\beta$ such that $x_n(\beta) + m_n t_\beta \nrightarrow 0$. Indeed, if $x_n(\beta) \to 0$, then any $t_\beta \in \mathbb{T} \setminus T_\beta$ of infinite order will do. If $x_n(\beta) \nrightarrow 0$, then there exists $\epsilon > 0$ such that $d(x_n(\beta), 0) \geq \epsilon$ for infinitely many $n \in \omega$. Pick $t_\beta \in \mathbb{T} \setminus T_\beta$ such that $d(mt_\beta, 0) < \epsilon/2$. It is clear that with this choice, the sequence $x_n(\beta) + m_n t_\beta$ does not converge to 0.

Our construction is complete. We define $t \in \mathbb{T}^{\mathfrak{c}}$ by $t(\alpha) = t_\alpha$ for every $\alpha < \mathfrak{c}$ and let $K = \langle t \rangle = \{mt : m \in \mathbb{Z}\}$. We have to check that conditions (1) and (2) are satisfied.

To see that the intersection $H \cap K$ is trivial, take any $h_n \in H$ and suppose that $h_n \in K$. By our definition of t_0, $h_n(0) \neq mt_0$ for every $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Therefore, if $h_n = mt$ for some $m \in \mathbb{Z}$, then $h_n(0) = mt(0) = mt_0$, which implies that $m = 0$, and thus h_n is the neutral element of H.

To verify the second condition, it suffices to show that no non-trivial sequence of elements of $H+K$ converges to the neutral element $\overline{0}$ of $\mathbb{T}^{\mathfrak{c}}$. Let us consider a non-trivial sequence $\{x_n + y_n : n \in \omega\}$ of elements of $H+K$. Then for each $n \in \omega$ there exists $m_n \in \mathbb{Z}$ such that $y_n = m_n t$. Suppose that the sequence $\{x_n + m_n t : n \in \omega\} \to \overline{0}$. Put $H(n) = x_n$ and $I(n) = m_n$ for each $n \in \omega$. Then the ordered pair (H, I) is in A and hence it appears in the list, with index β, where $1 \leq \beta < \mathfrak{c}$. Note that if the sequence $\{m_n : n \in \omega\}$ were eventually 0, then the non-trivial sequence $\{x_n : n \in \omega\}$ would converge to $\overline{0}$, which is impossible, since all compact subsets of H are finite. Therefore our construction guarantees that the sequence $\{x_n(\beta) + m_n t_\beta : n \in \omega\}$ does not converge to 0. This contradicts the assumption that $\{x_n + m_n t : n \in \omega\}$ converges to $\overline{0}$. Therefore, no infinite sequence of elements of $H+K$ converges to $\overline{0}$.

Let $G = H + K \leq \mathbb{T}^{\mathfrak{c}}$. Then the group G is monothetic because, by Lemma (2.1), K is dense in $\mathbb{T}^{\mathfrak{c}}$ and therefore also in G. The group G is σ-compact because it is countable. To see that G is not compactly generated, take any $A \subseteq G$ such that $\langle A \rangle = G$. Clearly, the subgroup H of G is not finitely generated. Since every subgroup of a finitely generated abelian group is finitely generated, the set A must be infinite. By condition (2), non-trivial subsequences of A cannot converge in A. Therefore the countable set A is not compact.

Finally, the group G is precompact as a subgroup of the compact group $\mathbb{T}^{\mathfrak{c}}$ and it is sequentially complete since no sequence in G converges to a point of $\mathbb{T}^{\mathfrak{c}} \setminus G$ (otherwise the group G would contain non-trivial convergent sequences, see [5] or [3], Lemma 5.2). $\square$

Analyzing the above construction of the group G, one can see that G fails to be compactly generated mainly because it does not contain non-trivial convergent sequences. This gives rise to the following problem:

PROBLEM (3.2). Let G be a countable monothetic Fréchet–Urysohn (or sequential) topological group. Is then G compactly generated?

Received April 19, 2004

Final version received September 22, 2004

YOLANDA TORRES FALCÓN
DEPARTAMENTO DE FILOSOFÍA
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA
AV. RAFAEL ATLIXCO 186
COL. VICENTINA
09340 MÉXICO, D.F.
ytf@xanum.uam.mx

MIKHAIL TKACHENKO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA
AV. RAFAEL ATLIXCO 186
COL. VICENTINA
09340 MÉXICO, D.F.
mich@xanum.uam.mx

References

[1] W. W. Comfort and V. Sacks, *Countably compact groups and finest totally bounded topologies*, Pacific J. Math. **49** (1973), 33–44.

[2] W. W. Comfort and F. J. Trigos Arrieta, *Remarks on a theorem of Glicksberg*, in: General Topology and Applications, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **134**, New York (1991), 25–33.

[3] D. Dikranjan and M. Tkachenko, *Sequential completeness of quotient groups*, Bull. Austral. Math. Soc. **61** (2000), 129–151.

[4] R. Engelking, General Topology, Heldermann Verlag, 1989.

[5] P. Flor, *Zur Bohr-Konvergenz von Folgen*, Math. Scand. **23** (1968), 169–170.

[6] H. Fujita and D. Shakhmatov, *A characterization of compactly generated metric groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (3) (2003), 953–961.

[7] K. P. Hart and J. van Mill, *Discrete sets and the maximal totally bounded group topology*, J. Pure Appl. Algebra **70** (1991), 73–80.

Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) Vol. 10, 2004

ULTRACOMPLETENESS IN EBERLEIN-GROTHENDIECK SPACES

D. JARDON AND V.V. TKACHUK

ABSTRACT. It is established that an Eberlein-Grothendieck space X is ultracomplete if and only if the set of all points at which X is not locally compact is contained in a compact set of countable outer character in X. We describe a general method of construction of ultracomplete spaces without points of local compactness. The subspace X_1 of points of countable character of a compact space X is studied and an example is given of an Eberlein compact X such that X_1 is not Čech-complete.

0. Introduction

In 1987 Ponomarev and Tkachuk introduced in [PT] strongly complete spaces as those which have countable character in βX. Later Buhagiar and Yoshioka gave in [BY1] an internal characterization of this property and called it ultracompleteness. Ponomarev and Tkachuk proved in [PT] that the subspace X_0 of all points at which an ultracomplete space X is not locally compact is a bounded set in X. They also proved that a paracompact space X is ultracomplete if and only if the subspace X_0 is contained in a compact subset of countable outer character in X. We strengthen this result in two directions showing that it holds both for Dieudonné complete spaces and Eberlein–Grothendieck spaces.

Another important class in which a space X is ultracomplete if and only if X_0 is contained in a compact subset of countable outer character in X, is the class of generally ordered spaces, i.e., subspaces of linearly ordered spaces; this was proved by Buhagiar (see [B]). It is impossible, however, to prove this result for general ultracomplete spaces because Buhagiar and Yoshioka showed (see [B] and [BY2]) that there exist ultracomplete spaces without points of local compactness; they proved that ω_1^ω is such an example. Using properties of free topological groups we offer a simple general method for constructing ultracomplete spaces without points of local compactness.

Another criterion of ultracompleteness, obtained in [PT], says that a metrizable space X is ultracomplete if and only if the set X_0 is compact. We show that this result cannot be generalized to the class of Eberlein–Grothendieck spaces.

Given a compact space X the set X_1 of the points of countable character of X is very useful for analyzing the properties of X. It is an easy consequence

2000 *Mathematics Subject Classification*: Primary: 54H11, 54C10, 22A05, 54D06. Secondary: 54D25, 54C25.

Keywords and phrases: ultracompleteness, Čech-completeness, countable type, pointwise countable type, Eberlein compact spaces.

Research supported by Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) of Mexico grants 94897 and 400200-5-38164-E..

of a theorem of Namioka on joint continuity [Na] that every Eberlein compact space X contains a dense Čech-complete metrizable subspace. In particular, X_1 contains a dense Čech-complete subspace. A natural question is whether the subspace X_1 has to be Čech-complete. We give an example showing that, in general, this is not the case.

1. Notation and terminology

All spaces under consideration are assumed to be Tychonoff. The space $\mathbb{R}$ is the set of real numbers with its natural topology. For any spaces X and Y let $C_p(X, Y)$ be the space of continuous maps from X to Y endowed with the topology of pointwise convergence. If $Y = \mathbb{R}$ we write $C_p(X)$ instead of $C_p(X, \mathbb{R})$. *An Eberlein-Grothendieck space* is a subspace of $C_p(K)$ for some compact space K. The Eberlein-Grothendieck compact spaces are called Eberlein compact.

The Stone-Čech compactification of a space X is denoted by βX. The character of X at its subspace $A \subset X$, denoted by $\chi(A, X)$, is the minimal of the cardinalities of all outer bases of A in X. A space X is Čech-complete if it is a G_δ-set in βX. A topological space X is called *ultracomplete* if $\chi(X, \beta X) \leq \omega$. It is clear that any ultracomplete space is also Čech-complete. The space X is of (pointwise) countable type if for any compact $F \subset X$ ($x \in X$) there exists a compact $K \subset X$ such that $F \subset K$ ($x \in K$) and $\chi(K, X) \leq \omega$.

A space X is called *hemicompact* if there is a countable family $\{F_n : n < \omega\}$ of compact subsets of X such that for any compact $K \subset X$ there exists $n \in \omega$ for which $K \subset F_n$. The Alexandroff one-point compactification of a locally compact space X is denoted by $A[X]$. A topological space X is called *scattered* if any $Y \subset X$ has an isolated point. A space X is called *ω-monolithic* if for any $Y \subset X$ with $|Y| \leq \omega$ we have $nw(\overline{Y}) \leq \omega$, where $nw(Y)$ is the network weight of the space Y.

Given a space X the family $\tau(X)$ is its topology and $\tau^* = \tau(X) \setminus \{\emptyset\}$; if $x \in X$ then $\tau(X, x) = \{U \in \tau(X) : x \in U\}$. The tightness $t(X)$ is the smallest cardinal κ such that for any $A \subset X$ and $x \in \overline{A}$ there exists $B \subset A$ with $|B| \leq \kappa$ such that $x \in \overline{B}$. A subset A of a space X is *bounded in X* if every $f \in C_p(X)$ is bounded on the set A.

2. Ultracomplete Eberlein-Grothendieck spaces

Since every locally compact space is ultracomplete, it is natural to study when an ultracomplete space is in some way similar to a locally compact space. Our first group of results strengthens the respective statements in [PT]. The following theorem from [PT] is the main tool for dealing with ultracomplete spaces.

THEOREM (2.1). *For any Tychonoff space X, the following conditions are equivalent:*

(i) *$\chi(X, cX) \leq \omega$ for some compactification cX of the space X;*
(ii) *$\chi(X, kX) \leq \omega$ for every compactification kX of the space X;*
(iii) *$\chi(X, \beta X) \leq \omega$ for the Stone–Čech compactification βX of the space X;*
(iv) *$cX \setminus X$ is hemicompact for some compactification cX of the space X;*
(v) *$kX \setminus X$ is hemicompact for every compactificaction kX of the space X;*

(vi) *$\beta X \setminus X$ is hemicompact.*

A topological space is called *ultracomplete* if it satisfies one of the conditions of the previous theorem.

Definition (2.2). *Call a space X almost locally compact if there is a compact $K \subset X$ such that $\chi(K, X) \le \omega$ and $X_0 = \{x \in X : X$ is not locally compact at $x\} \subset K$.*

Almost locally compact spaces were implicitly used in [PT]; the following fact lists some properties of almost locally compact spaces and demonstrates why they are important when it takes to the study of ultracomplete spaces.

PROPOSITION (2.3). (i) *Every almost locally compact space is ultracomplete;*
(ii) *a paracompact space is ultracomplete if and only if it is almost locally compact;*
(iii) *a closed subspace of an almost locally compact space is almost locally compact;*
(iv) *an open continuous image of an almost locally compact space is almost locally compact.*

Proof. The items (i) and (ii) were proved in [PT] (in other terminology). If X is almost locally compact space and F is closed in X then there is a compact $K \subset X$ such that $\chi(K, X) \le \omega$ and $X_0 \subset K$. It is easy to check that $K' = K \cap F$ is a compact subspace of F such that $\chi(K', F) \le \omega$ and all points of non-local compactness of F belong to K'. Thus F is almost locally compact so (iii) is proved.

Finally, assume that X is almost locally compact and $f : X \to Y$ is an open continuous onto map. It is straightforward that $Y_0 \subset f(X_0)$; if $K \subset X$ is compact such that $\chi(K, X) \le \omega$ and $X_0 \subset K$ then $K' = f(K)$ is a compact subset of Y such that $\chi(K', Y) \le \omega$ and $Y_0 \subset K'$. This settles (iv). □

The proof of item (ii) of Proposition (2.3) given in [PT], is somewhat technical so it is worth presenting here some simple observations which make it possible to establish a stronger result. Recall that a space is *Dieudonné complete* if it is homeomorphic to a closed subspace of a product of metrizable spaces. Any paracompact space is Dieudonné complete [En], Problem 8.5.13.

THEOREM (2.4). *A Dieudonné complete space is ultracomplete if and only if it is almost locally compact.*

Proof. The sufficiency is clear from Proposition (2.3) (i). Now if X is ultracomplete and Dieudonné complete then the set $X_0 = \{x \in X : X$ is not locally compact at $x\}$ is closed and bounded in X: this was also proved in [PT]. It is well-known (and easy to prove) that any closed bounded subset of a Dieudonné complete space is compact so X_0 is a compact subset of X. Since X is Čech-complete, it is of countable type and hence there is a compact $K \subset X$ such that $\chi(K, X) \le \omega$ and $X_0 \subset K$. Thus X is almost locally compact. □

PROPOSITION (2.5). *Every non-empty ultracomplete Eberlein-Grothendieck space has points of local compactness.*

Proof. Let K be a compact space and take a non-empty ultracomplete $Y \subset C_p(K)$. Denote by Y_0 the subspace of all points at which Y is not locally compact. If $Y_0 = Y$, then Y is bounded in itself and hence pseudocompact by an already mentioned theorem from [PT]. Therefore Y is compact being a pseudocompact Eberlein-Grothendieck space [PS]. This contradiction with the equality $Y_0 = Y$ shows that $Y \setminus Y_0 \neq \emptyset$, i.e., Y has points of local compactness. □

We include a simple proof of the following well-known fact for the sake of completeness.

PROPOSITION (2.6). *If X is a Čech-complete Eberlein-Grothendieck space, then X is Fréchet-Urysohn.*

Proof. Take any $A \subset X$ and a point $x \in \overline{A}$. Since X is Eberlein-Grothendieck, the tightness of X is countable and hence we can find a countable $N \subset A$ such that $x \in \overline{N}$. From ω-monolithity of X (see [Ar2, Corollary II.6.19]) it follows that $nw(\overline{N}) \leq \omega$. Since every Čech-complete space with a countable network has countable weight, the space $\overline{N}$ is metrizable. Therefore there exists a sequence $\{x_n : n < \omega\} \subset N$ which converges to x. □

Given a space X let $\mathcal{N}(X)$ denote the family of all countably infinite closed and discrete subspaces of X.

Definition (2.7). *A countable family $\mathcal{U} \subset \mathcal{N}(X)$ marks a point $x \in X$, if for any $W \in \tau(X, x)$ there exists a set $D \in \mathcal{U}$ such that $|D \cap W| = \omega$. A point $x \in X$ is called marked if it is marked by some countable $\mathcal{U} \subset \mathcal{N}(X)$.*

It is easy to see that if x is marked by a family $\mathcal{U}$, then $Y = \{x\} \cup (\bigcup \mathcal{U})$ is a countable set which reflects the non-local countable compactness of the space X at the point x. It is clear that only the points of non-local countable compactness can be marked.

LEMMA (2.8). *If X is an Eberlein–Grothendieck space and X_0 is the set of all points at which X is not locally compact, then all points of X_0 are marked.*

Proof. Let M_0 be the set of all marked points of X. In the first place we will prove that $M_0 \subset X_0$ is closed in X. Take any point $x \in \overline{M_0} \setminus M_0$. Since $t(X) \leq \omega$, there is a set $A = \{x_n : n < \omega\} \subset M_0$ such that $x \in \overline{A}$. Every point x_n is marked by a countable family $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{N}(X)$. It is easy to see that $\mathcal{U} = \bigcup\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\} \subset \mathcal{N}(X)$ marks the point x and therefore $x \in M_0$.

To prove that $M_0 = X_0$ assume, towards a contradiction, that there is a point $z \in X_0 \setminus M_0$. Since the space X is of countable type, there exists a compact $P \subset X$ such that $\chi(P, X) \leq \omega$ and $z \in P$. Since $F = P \setminus M_0$ is an open neighborhood of z in the subspace P, we can find a closed G_δ-subset K of the space P such that $z \in K \subset F$. It is easy to see that $\chi(K, X) \leq \chi(K, P) \cdot \chi(P, X) \leq \omega$.

Let $\mathcal{O} = \{O_n : n < \omega\}$ be a countable outer base of K in X such that $\overline{O_{n+1}} \subset O_n$ for all $n \in \omega$. The space X is not locally compact at the point $z \in \bigcap_{n\in\omega} O_n$ so, for every $n \in \omega$, there exists $E_n \in \mathcal{N}(X)$ with $E_n \subset O_n$. We claim that the family $\mathcal{U} = \{E_n : n < \omega\}$ marks some point $p \in K$.

Indeed, assume for contradiction that $\mathcal{U}$ does not mark any point of K and hence for any $x \in K$ there exists $W_x \in \tau(K)$ for which $W_x \cap E_n$ is a finite set for all $n < \omega$. The family $\mathcal{V} = \{W_x : x \in K\}$ is an open cover of the compact set K so there exist $x_1, x_2, \ldots, x_m \in K$ such that $K \subset W_{x_1} \cup W_{x_2} \cup \cdots \cup W_{x_m}$. Since $\mathcal{O}$ is an outer base of K, we have $O_n \subset W_{x_1} \cup W_{x_2} \cup \cdots \cup W_{x_m}$ for some $n \in \omega$. This implies that $E_n \subset W_{x_1} \cup W_{x_2} \cup \cdots \cup W_{x_m}$ which is a contradiction because the set E_n is infinite and $E_n \cap W_{x_i}$ is finite for all $i = 1, 2, \ldots, m$.

Thus the family $\mathcal{U}$ marks some point of $p \in K$ which contradicts $K \cap M_0 = \emptyset$ and proves that $\overline{M}_0 = M_0 = X_0$. □

THEOREM (2.9). *An Eberlein-Grothendieck space is ultracomplete if and only if it is almost locally compact.*

Proof. The sufficiency was proved in [PT] so assume that X is an ultracomplete Eberlein-Grothendieck space. Let us first show that the set $X_0 = \{x \in X : X \text{ is not locally compact at } x\}$ is compact.

Fix a compact space K such that $X \subset C_p(K)$ and assume that X_0 is not compact. From ultracompleteness of the space X it follows that X_0 is a bounded subspace in X and hence X_0 is bounded in the space $C_p(K)$ as well. Consequently, $Y = \mathrm{cl}_{C_p(K)}(X_0)$ is an Eberlein compact space [Ar2], Theorem III.4.1. Any Eberlein compact space is Fréchet-Urysohn, so if there exists a point $y \in Y \setminus X_0$ then there is a sequence $S = \{y_n : n < \omega\} \subset X_0$ which converges to y. Lemma 2.8 implies that any point y_n is marked by a countable family of $\mathcal{D}_n \subset \mathcal{N}(X)$. □

It is clear that the family $\mathcal{D} = \bigcup\{\mathcal{D}_n : n < \omega\}$ is countable. Since any closed subspace of an ultracomplete space is ultracomplete, the space $E = \mathrm{cl}_X(\bigcup \mathcal{D})$ is ultracomplete; besides, $nw(E) \le \omega$ because $C_p(K)$ is ω-monolithic [Ar2], Corollary II.6.19. Now, even in Čech-complete spaces the weight and the network weight coincide so $w(E) = nw(E) = \omega$. Therefore E is a metrizable space and hence the subspace E_0 of points at which E is not locally compact is a compact space.

Furthermore, for any $n \in \omega$, the space E is not locally compact at y_n because the family $\mathcal{D}_n$ marks the point y_n in the space E. Therefore $S \subset E_0$ is an infinite closed discrete subset of E_0 which contradicts compactness of E_0. This contradiction proves that $\mathrm{cl}_{C_p(K)}(X_0) = X_0$, i.e., X_0 is compact. Every ultracomplete space is of countable type so $X_0 \subset Q$ for some compact $Q \subset X$ with $\chi(Q, X) \le \omega$, i.e., X is almost locally compact.

Now it is time to show that it is wrong to think that any ultracomplete space is almost locally compact. The first example (answering a respective question from [PT]) was given by Buhagiar and Yoshioka (see [B] and [BY2]): they proved that ω_1^ω is an ultracomplete space without points of local compactness. The following theorem shows that there are many such examples.

THEOREM (2.10). *Let X be an infinite compact space. If $F(X)$ is the Markov free topological group of X, then $Y = \beta(F(X)) \setminus F(X)$ is an ultracomplete space without points of local compactness.*

Proof. It is a well-known fact (see e.g. [Ar1], Proposition 4.10) that $F(X)$ does not have points of local compactness and hence the space $K = \beta(F(X))$ is a compact extension of Y. Since $F(X) = K \backslash Y$ is dense in K, the space Y is not locally compact at any point.

Furthermore, for each $n \in \omega$, the set $F_n(X) \subset F(X)$ which consists of all irreducible words of length $\leq n$, is compact. Thomas proved in [Th] that for each compact $C \subset F(X)$ there exists $n \in \omega$ such that $C \subset F_n(X)$, i.e., the family $\{F_n(X) : n \in \omega\}$ witnesses hemicompactness of $F(X)$. Now apply Theorem (2.1) to conclude that Y is ultracomplete. □

Theorem (2.10) shows that not every ultracomplete space has a dense locally compact subspace, so a natural question is when a space with a dense ultracomplete subspace does have a dense locally compact subspace. We give some sufficient conditions for this to happen.

The most drastic consequences of existence of a dense ultracomplete subspace can be obtained for the spaces $C_p(X)$; recall first that it was established in [Ar2], Theorem I.3.1 that $C_p(X)$ has a dense Čech-complete subspace if and only if X is countable and discrete.

PROPOSITION (2.11). *A space $C_p(X)$ has an ultracomplete dense subspace if and only if X is finite.*

Proof. If X is finite then $C_p(X) = \mathbb{R}^X$ is locally compact and hence ultracomplete. Now, if $C_p(X)$ has an ultracomplete dense subset D then X is countable and discrete by the mentioned result of Arhangel'skii. Let $Z \subset D$ be the subspace of all points at which D is not locally compact. The ultracompleteness of D implies that Z is bounded in D and therefore Z is also bounded in the metrizable space $C_p(X)$. Thus $\overline{Z}$ is compact (the bar denotes the closure in $C_p(X)$).

If X is infinite then the space $\mathbb{R}^X = \mathbb{R}^\omega$ has no points of local compactness so $\overline{Z}$ is nowhere dense in $\mathbb{R}^X$; an immediate consequence is that Z is nowhere dense in $C_p(X)$, and hence $D \setminus \overline{Z}$ is a locally compact dense subspace of $C_p(X)$ which implies that $C_p(X)$ is locally compact and hence the space X is finite. □

Remark (2.12). It follows from Corollary 2.12 in [LT] that $C_p(X)$ is locally ultracomplete if and only if $C_p(X)$ is locally compact, i.e.; if and only if X is finite.

PROPOSITION (2.13). *If X is a Dieudonné complete space, then X has a dense ultracomplete subspace if and only if X has a dense locally compact subspace.*

Proof. The sufficiency is evident so assume that X has a dense ultracomplete subspace Y. The set Y_0 of points of non-local compactness of Y is bounded in Y and hence Y_0 is bounded in X. Every bounded subset of a Dieudonné complete space has a compact closure so $K = \text{cl}_X(Y_0)$ is compact. The space $U = \text{Int}_X(K)$ is locally compact (maybe empty) and hence $(Y \backslash Y_0) \cup U$ is a dense locally compact subspace of X. □

COROLLARY (2.14). *If a space X has a dense Dieudonné complete ultracomplete subspace, then it has a dense locally compact subspace.*

Any Eberlein compact space has a dense metrizable Čech-complete subspace [Na]; a possible strengthening of this could be to prove that any Eberlein compact space has a dense metrizable ultracomplete subspace. Our previous results enable us to show that it is not always true. The following fact is an immediate consequence of Corollary (2.14).

PROPOSITION (2.15). *An Eberlein compact X has a dense metrizable ultracomplete subspace if and only if it has a dense metrizable locally compact subspace.*

Example (2.16). The Alexandroff compactification $A = A[\omega_1]$ of a discrete space of cardinality ω_1 is an Eberlein compact space with a dense locally compact metrizable subspace. However, the space $X = A^\omega$ is a non-metrizable Eberlein compact space such that every $U \in \tau^*(X)$ contains a subspace homeomorphic to X; therefore X does not have a dense locally compact metrizable subspace. By Proposition (2.15) the space X does not have a dense metrizable ultracomplete subspace. □

Ponomarev and Tkachuk proved in [PT] that for a metrizable space X, if the set X_0 of points of non-local compactness of X is compact then X is ultracomplete (it is easy to see that the converse is also true). The following example shows that this theorem cannot be extended to the class of Eberlein–Grothendieck spaces.

Example (2.17). Uspensky proved in [Us1] that there is a countable closed subspace $A \subset C_p([0,1])$ without non-trivial convergent sequences which has a unique non-isolated point x. Thus A is a non-ultracomplete Eberlein-Grothendieck space which is non-locally compact only at the point x.

Proof. Since A is not Fréchet–Urysohn, Proposition (2.6) shows that that X is not ultracomplete. It is evident that A is not-locally-compact only at the point x. □

Given a space X let $X_1 = \{x \in X : \chi(x, X) \leq \omega\}$. The rest of the paper is devoted to the study of the set X_1 for a compact space X. It is known that for any Corson compact X, the set X_1 is dense in X; if X is an Eberlein compact space, then X_1 has a dense Čech-complete subspace [Na] so an evident question is whether X_1 is Čech-complete for any Eberlein compact space X.

Example (2.18). There exists an Eberlein compact X for which X_1 is not ultracomplete.

Proof. Let $D(\omega_1)$ be a discrete space of cardinality ω_1. Then $X = (A[D(\omega_1)])^\omega$ is an Eberlein compact space. Observe that $X_1 = D(\omega_1)^\omega$ is a countable power of the discrete space $D(\omega_1)$. Buhagiar and Yoshioka proved that if a countable power of a space Y is ultracomplete then Y must be countably compact. Consequently, X_1 is not ultracomplete. □

If we suspect that the space X_1 is Čech-complete for some compact space X in which X_1 is dense then X_1 must be a G_δ-set in X and hence $X \backslash X_1$ has to be σ-compact or at least, Lindelöf. The following proposition shows that for a wide class of compact spaces X, the set X_1 is dense in X and $X \backslash X_1$ is Lindelöf.

PROPOSITION (2.19). *For every scattered compact space X the set X_1 is (trivially) dense in X and the set $X_2 = X\backslash X_1$ of points of uncountable character in X is a Lindelöf space.*

Proof. To see that X_1 is dense in X observe that the set D of isolated points of X is dense in X and $D \subset X_1$. Recall that the ω-modification μ of $\tau(X)$ is the topology on X generated by all G_δ-subsets of X. It is evident that every $y \in X_1$ is isolated in $X' = (X, \mu)$ and hence X_2 is closed in X'. Denote by X_2' the set X_2 with the topology inherited from X'.

It is known [Us2] that the ω-modification of a compact scattered space is Lindelöf so X' is Lindelöf and hence its closed subspace X_2' is also Lindelöf. The identity map $i : X' \to X$ is continuous because $\tau(X) \subset \mu = \tau(X')$. Thus $X_2 = i(X_2')$ is Lindelöf being a continuous image of a Lindelöf space X_2'. □

Example (2.20). There exists an Eberlein compact space X for which $X\backslash X_1$ is not Lindelöf and therefore X_1 is not Čech-complete.

Proof. The space $A[\omega_1]$ is the one-point compactification of a discrete space of cardinality ω_1; denote by a the unique non-isolated point of $A[\omega_1]$. Let C be the Cantor set with its natural topology induced from $\mathbb{R}$. We will need a copy C' of the set C; given $c \in C$ denote by c' its copy in C' and if $A \subset C$ then $A' = \{a' : a \in A\}$. We will consider that C' carries the discrete topology.

The underlying set of our future space is $Y = C \cup (C' \times A[\omega_1])$; for any point $x \in C' \times A[\omega_1]$ let $\mathcal{B}_x$ be the family of all open subsets of $C' \times A[\omega_1]$ which contain x. If $x \in C$ then $\mathcal{U}_x$ is the family of all clopen subsets of C which contain x; let $\mathcal{B}_x = \{U \cup ((U' \setminus \{x\}) \times A[\omega_1]) : U \in \mathcal{U}_x\}$. Let τ be the topology on Y generated by the collection $\{\mathcal{B}_x : x \in Y\}$ of local bases; then $X = (Y, \tau)$ is our promised space.

The proof of compactness of X goes exactly as the proof of compactness of the Alexandroff duplicate of a compact space (see [AP, Chapter III, Problem 81]). Observe that $X_2 = C' \times \{a\}$ is precisely the set of points at which X is not first countable. Since X_2 is discrete and uncountable, it is not Lindelöf. Consequently, X_1 is not a Čech-complete space.

To see that X is an Eberlein compact space let $\mathcal{U}$ be the (countable) family of non-empty clopen subsets of C. The families $\mathcal{F}_1 = \{U \cup (U' \times A[\omega_1]) : U \in \mathcal{U}\}$, $\mathcal{F}_2 = \{\{x\} : x \in X \setminus (C \cup (C' \times \{a\}))\}$ and $\mathcal{F}_3 = \{\{x\} \times A[\omega_1] : x \in C'\}$ are σ-point-finite and consist of cozero-sets of X; it is straightforward that $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \bigcup \mathcal{F}_2 \bigcup \mathcal{F}_3 \subset \tau(X)$ is T_0-separating in X; i.e., for any distinct points $x, y \in X$ there is $U \in \mathcal{F}$ such that $|U \cap \{x, y\}| = 1$. Thus we can apply Rosenthal's criterion [Ro] to conclude that X is an Eberlein compact space. □

3. Open problems

The authors feel that the topic of this paper is far from being exhausted. An evidence of this is the fact that there are more unsolved problems here than solved ones. We list below the most interesting questions we could not answer.

Given a compact space X let $X_1 = \{x \in X : \chi(x, X) \leq \omega\}$.

Problem (3.1). Is it true that X_1 is Čech-complete for any scattered compact X?

Problem (3.2). Is it true that X_1 is ultracomplete for any scattered compact X?

Problem (3.3). Let X be a scattered Eberlein compact space. Is it true that X_1 is Čech-complete?

Problem (3.4). Let X be a scattered Eberlein compact space. Is it true that X_1 is ultracomplete?

Problem (3.5). Find a general class $\mathcal{P}$ of Eberlein compact spaces for which $X \in \mathcal{P}$ implies that X_1 is metrizable. For example if X is a scattered Eberlein compact space, is then X_1 metrizable?

Problem (3.6). Let X be an Eberlein compact space. When is X_1 ultracomplete (or Čech-complete)? For example, must X_1 be Čech-complete if it is metrizable? Must X_1 be ultracomplete if the set of points of non-local compactness of X_1 is compact?

Problem (3.7). Let X be an Eberlein compact space. Is it true that the Lindelöf number of $X \setminus X_1$ does not exceed $\mathfrak{c}$?

Problem (3.8). Does X_1 have a dense Čech-complete subspace for any Corson compact space X?

Problem (3.9). Assume that X is a Lindelöf Σ-space and $Y \subset C_p(X)$. Is it true that Y is ultracomplete if and only if it is almost locally compact?

Problem (3.10). Let X be a homogeneous ultracomplete space. Must X be locally compact?

Received July 23, 2003

Final version received February 14, 2004

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA, UNIDAD IZTAPALAPA
AV. SAN RAFAEL ATLIXCO 186, COL. VICENTINA
IZTAPALAPA, C.P. 09340, MÉXICO D.F.
jardon60@hotmail.com
vova@xanum.uam.mx

REFERENCES

[AP] A.V. ARHANGEL'SKII, V.I. PONOMAREV, Fundamentals of General Topology, Problems and Exercises, Reidel P.C., Dordrecht, 1984.

[Ar1] A. V. ARKHANGEL'SKII, *Relations between invariants of the topological groups and its subspaces (in Russian)*, Uspehi Matem. Nauk **35** (3), (1980), 3–22.

[Ar2] A. V. ARKHANGEL'SKII, Topological function spaces, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1992.

[AV] M. O. ASANOV, N. V. VELICHKO, *Compact sets in $C_p(X)$*, Comment Math. Helv. **22** (1981), 255–266.

[B] D. BUHAGIAR, *Not locally compact points in ultracomplete topological spaces*, Questions Answers Gen. Topology, **19** (1) (2001), 125–131.

[BY1] D. BUHAGIAR, I. YOSHIOKA, *Ultracomplete topological spaces*, Acta Math. Hungar. **92** (1-2) (2001), 19–26.

[BY2] D. BUHAGIAR, I. YOSHIOKA, *Sums and products of ultracomplete topological spaces*, Topology Appl. **122** (2002), 77–86.

[En] R. ENGELKING, General Topology, Heldermann Verlag, 1989.

[Gr] M.I. GRAEV, *Theory of topological groups* (in Russian), Uspehi Matem. Nauk **5** (2), (1950), 3–56.

[LT] M. LÓPEZ DE LUNA, V. V. TKACHUK, *Čech-completeness and ultracompleteness in "nice" spaces*, Comment. Math. Univ. Carolin. **43** (3) (2002), 515–524.

[Na] I. NAMIOKA, *Separate continuity and joint continuity*, Pacific J. Math. **51** (2) (1974), 515–531.

[PS] D. PREISS, P. SIMON, *A weakly pseudocompact subspace of a Banach space is weakly compact*, Comment. Math. Univ. Carolin. **15** (4) (1974), 603–609.

[PT] V. I. PONOMAREV, V. V. TKACHUK, *The countable character of X in βX compared with the countable character of the diagonal in $X \times X$* (in Russian), Vestnik Moskov Univ. **42** (5) (1987), 16–19.

[Ro] H. P. ROSENTHAL, *The heredity problem for weakly compactly generated compact spaces*, Compositio Math. **28** (1), (1974), 88–111.

[Th] B.V. THOMAS, *Free topological groups*, General Topology and Appl. **4** (1974), 51–72.

[Us1] V.V. USPENSKY, *On embeddings in functional spaces* (in Russian), Dokl. Acad. Nauk (DAN) SSSR **242** (3) (1978), 545–546.

[Us2] V.V. USPENSKY, *On frequency spectrum of topological spaces* (in Russian), Vestnik Moskov Univ. Matem. **47** (1) (1982), 31–35.

Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) Vol. 10, 2004

QUELQUES GROUPES MOYENNABLES DE DIFFÉOMORPHISMES DE L'INTERVALLE

ANDRÉS NAVAS

ABSTRACT. We consider the group of C^2 orientation preserving diffeomorphisms of the unit interval. We give a dynamical description of its subexponentially amenable subgroups. The results obtained can be extended to the group of orientation preserving piecewise affine homeomorphisms of the interval.

RÉSUMÉ. On considère le groupe des difféomorphismes directs et de classe C^2 de l'intervalle unité. On donne une description dynamique de ses sous-groupes sous-exponentiellement moyennables. Les résultats obtenus s'étendent au groupe des homéomorphismes directs et affines par morceaux de l'intervalle.

1. Introduction

Les sous-groupes du groupe des difféomorphismes de classe C^2 de l'intervalle satisfont certaines propriétés de rigidité qui permettent d'envisager une classification dynamique à partir de données algébriques rélévantes. Par exemple, on connaît très bien la structure des sous-groupes commutatifs. De plus, tout sous-groupe nilpotent doit être abélien. La classification des sous-groupes résolubles est aussi connue. Nous renvoyons le lecteur à [34] pour un rappel sur ces résultats ainsi que des références précises.

On sait par ailleurs que pour tout sous-groupe de type fini et non trivial Γ de $\mathrm{Diff}^1_+([0,1[)$, le premier espace de cohomologie $H^1(\Gamma,\mathbb{R})$ est non trivial (c'est une version du théorème de stabilité de Thurston ; voir [45]). Cela entraîne par exemple que tout sous-groupe de $\mathrm{Diff}^1_+([0,1[)$ ayant la propriété (T) de Kazhdan est trivial. Signalons en passant que ce dernier résultat s'étend pour les groupes de *difféomorphismes du cercle* : pour $\alpha > 1/2$, tout sous-groupe de type fini de $\mathrm{Diff}^{1+\alpha}_+(S^1)$ qui vérifie la propriété (T) de Kazhdan est fini (voir [36]). À cause de ceci et de [34], l'un des problèmes principaux dans la théorie des groupes de difféomorphismes du cercle est celui de la classification des groupes moyennables. Par un argument simple donné au §3 de [34], ce dernier problème se ramène au cas de l'intervalle.

Pour aboutir à une classification plus au moins complète des groupes de difféomorphismes de l'intervalle (et aussi ceux du cercle), l'un des problèmes qui se pose de manière naturelle est donc celui de la classification des sous-groupes *moyennables* de $\mathrm{Diff}^2_+([0,1])$. En fait, comme il a été expliqué au §6.2 de [34], dans le contexte des groupes localement compacts, ce problème

2000 *Mathematics Subject Classification*: 57S25, 57R30, 37E99, 20F16, 20F60.

Keywords and phrases: one dimensional dynamics, groups of diffeomorphisms, solvable, amenable.

Mots-clés: dynamique unidimensionelle, groupes de difféomorphismes, résoluble, moyennable.

se réduit à la classification des sous-groupes qui sont moyennables munis de la topologie *discrète* (notamment ceux de type fini). Cependant, même ce dernier problème semble être très compliqué, d'abord parce qu'il est difficile d'envisager une méthode pour l'aborder, et surtout parce qu'il est relié au problème de la moyennabilité du groupe F de Thompson. Rappelons que le groupe F a été originalement défini par R. Thompson comme étant celui constitué des homéomorphismes directs de $[0,1]$ qui sont affines par morceaux, les points de discontinuité de la dérivée étant des rationnels dyadiques et les valeurs possibles de cette dérivée des puissances entières de 2. Néanmoins, dans [15] il est démontré que F se plonge dans le groupe des difféomorphismes directs et de classe C^∞ de $[0,1]$. La groupe F ne contient pas de sous-groupe libre à deux générateurs (voir [4]), et plusieurs auteurs ont essayé de montrer (encore sans succés) que ce groupe n'est pas moyennable (voir par exemple [7] et [23]). Ce problème possède une certaine importance en théorie des groupes.

En raison des problèmes expliqués ci-dessus, nous nous sommes contentés de résoudre des questions partielles liées au problème général. Dans ce travail nous allons décrire la dynamique d'une famille «particulière» de groupes moyennables : les groupes *sous-exponentiellement moyennables*. D'une manière imprécise, ces groupes sont obtenus à partir des groupes à croissance sous-exponentielle par des réunions directes et des extensions successives (voir le §2 pour plus de détails). Signalons que l'étude que nous allons entreprendre exclut *a priori* le groupe F de Thompson : la preuve faite dans [7] pour démontrer que F n'est pas élémentairement moyennable s'applique mot par mot pour démontrer que ce groupe n'est pas sous-exponentiellement moyennable non plus (nous verrons comment on peut redémontrer ce fait par une méthode complètement différente à celle de [7]). Signalons d'autre part que les groupes sous-exponentiellement moyennables *d'homéomorphismes directs de la droite* ont été déjà etudiés, d'un point de vue algébrique, dans le cadre de la théorie générale des groupes ordonnables. On sait par exemple que ces groupes sont localement indicables (voir [25] et [42]). Nous croyons que par des méthodes semblables à celles de cet article on devrait pouvoir étudier aussi les sous-groupes sous-exponentiellement moyennables du groupe des *difféomorphismes de la droite*.

Les techniques que nous appliquerons sont des raffinements de celles introduites dans [34] pour la classification des groupes résolubles de difféomorphismes de l'intervalle. En fait, au lieu de travailler en classe C^2, nous considérerons directement les sous-groupes du groupe $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0,1[)$ des difféomorphismes directs et de classe C^1 dont la variation du logarithme de la dérivée est finie sur chaque intervalle compact. Ceci rend les démonstrations plus élaborées, car on ne peut pas appliquer des techniques de contrôle de la distorsion «à la Sacksteder» ou utiliser *la théorie des niveaux* (voir [6]). Nous utilisons plutôt la méthode de N. Kopell pour contrôler la distorsion des conjuguées des applications de l'intervalle. L'intérêt d'obtenir des résultats en classse $C^{1+\mathrm{vb}}$ et non seulement en classe C^2 est la possibilité de pouvoir les éteindre dans des cadres plus généraux, comme par exemple celui du groupe $\mathrm{Afm}_+([0,1[)$ des homéomorphismes directs et affines par morceaux de l'intervalle dont le nombre de points de discontinuité de la dérivée est fini sur chaque intervalle de la forme $[0, a]$, où $a < 1$.

Une autre approche au problème de la classification des sous-groupes moyennables de $\mathrm{Diff}_+^2([0,1])$ consiste à caractériser de manière claire la famille de ceux qui ne contiennent pas de sous-groupe libre à deux générateurs. Cependant, ce problème semble aussi être très compliqué. L'une des raisons de cela est le fait que la méthode classique pour trouver des sous-groupes libres à deux générateurs dans un groupe, à savoir le lemme du ping-pong de Klein (voir [22]), s'avère inapplicable pour des difféomorphismes (et en général pour des homéomorphismes) de l'intervalle. À manière d'exemple, signalons qu'il est connu que le groupe des homéomorphismes de la droite engendré par les applications $x \mapsto x+1$ et $x \mapsto x^3$ est libre (voir [9] et [47]). Cependant, les preuves existentes de ce résultat si intuitif sont très compliquées.

Une famille particulièrement intéressante de groupes sans sous-groupe libre à deux générateurs est celle des groupes qui vérifient une loi non triviale. Il est très probablement vrai que tout sous-groupe de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0,1[)$ qui vérifie une loi (non triviale) est résoluble. Cependant, puisque le groupe F de Thompson ne satisfait aucune loi (voir [4]), un tel résultat ne serait pas encore satisfaisant. Remarquons en passant que l'étude des sous-groupes de $\mathrm{Hom\acute{e}o}_+(\mathrm{S}^1)$ qui vérifient une loi se ramène à celle des groupes d'homéomorphismes de l'intervalle vérifiant une loi. Ceci découle aisément (de la preuve) d'un théorème dû à G. Margulis (voir [28] ou le premier appendice de [35]).

2. Notations et énoncés des résultats

Soit Γ un groupe de type fini et $\Gamma^1 = \{f_1, \cdots, f_k\}$ un système fini de générateurs de Γ. Pour $n \geq 2$ considérons la boule de rayon n

$$\Gamma^n = \{f \in \Gamma : f = f_{i_1}^{\pm 1} f_{i_2}^{\pm 1} \cdots f_{i_m}^{\pm 1} \text{ pour certains } f_{i_j} \in \Gamma^1 \text{ et } m \leq n\},$$

et notons $C(n)$ son cardinal. On dit que Γ est à *croissance polynomiale* s'il existe un polynôme P tel que $C(n) \leq P(n)$ pour tout n ; on dit que Γ est à croissance exponentielle s'il existe $C > 0$ et $\lambda > 1$ tels que $C(n) \geq C\lambda^n$ pour tout n ; finalement, on dit que Γ est à croissance *sous-exponentielle* si sa croissance n'est pas exponentielle. Ces notions ne dépendent pas du choix du système (fini) de générateurs.

Rappelons qu'un groupe topologique localement compact est *moyennable* si toute action continue de ce groupe par homéomorphismes d'un espace métrique compact préserve au moins une mesure de probabilité. Tout groupe de type fini et à croissance sous-exponentielle est moyennable. D'autre part, la famille des groupes moyennables est fermée par rapport aux opérations suivantes (dites *opérations élémentaires*) : passage à un quotient, passage à un sous-groupe, réunion directe et extension. Notons AG la famille des groupes moyennables discrets et SG la plus petite famille qui est fermée par rapport aux opérations élémentaires et qui contient les groupes discrets dont tous les sous-groupes de type fini sont à croissance sous-exponentielle. Les éléments de cette dernière famille sont appelés *groupes sous-exponentiellement moyennables*. Pour mieux expliquer cette définition, considérons les familles de groupes définies par récurrence par :

(i) SG_1 est la famille des groupes discrets dont tous les sous-groupes de type fini sont à croissance sous-exponentielle ;

(ii) si α n'est pas un ordinal limite alors SG_α est la famille des groupes obtenus par une extension

$$0 \longrightarrow \mathrm{G} \longrightarrow \Gamma \longrightarrow \mathrm{H} \longrightarrow 0,$$

avec $\mathrm{G} \in \mathrm{SG}_{\alpha-1}$ et $\Gamma/\mathrm{G} \sim \mathrm{H} \in \mathrm{SG}_1$;

(iii) si α est un ordinal limite alors SG_α est la famille des groupes obtenus comme une réunion directe de groupes dans SG_β, avec $\beta < \alpha$.

Question (2.1). Est-il vrai que AG = SG ?

Bien que tous les exemples connus de groupes moyennables discrets appartiennent à SG, le travail [20] de R. Grigorchuk et A. Żuk laisse entendre que la réponse à la question ci-dessus pourrait être négative. D'ailleurs, si dans la définition précédente on remplace la classe SG_1 par celle des groupes dont les sous-groupes de type fini sont abéliens à indice fini près, alors on obtient une famille plus petite de groupes, appelée la famille des *groupes élémentairement moyennables*. Pour plus de détails sur ce sujet on peut consulter [8] et [38].

Dans le cadre des difféomorphismes analytiques réels de l'intervalle, la description des sous-groupes sous-exponentiellement moyennables est très simple. En effet, dans [34] il est démontré que tout sous-groupe sous-exponentiellement moyennable de $\mathrm{Diff}_+^\omega([0,1[)$ est métabélien. Ceci reste valable dans $\mathrm{Diff}_+^\omega(\mathbb{R})$ (voir [33]). Plus généralement, les sous-groupes sous-exponentiellement moyennables et à points fixes isolés (au sens du §5 de [34]) de $\mathrm{Homéo}_+([0,1[)$ (resp. de $\mathrm{Homéo}_+(\mathrm{S}^1)$ ou de $\mathrm{Homéo}_+(\mathbb{R})$) sont métabéliens (resp. résolubles d'ordre de résolubilité au plus 3). Pour les groupes de difféomorphismes de classe $\mathrm{C}^{1+\mathrm{vb}}$ de l'intervalle nous démontrons le résultat suivant, valable aussi pour les sous-groupes de $\mathrm{Afm}_+([0,1[)$.

THÉORÈME (A). *Si un sous-groupe sous-exponentiellement moyennable* Γ *de* $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0,1[)$ *appartient à* SG_α *pour certain entier positif* α*, alors* Γ *est résoluble d'ordre de résolubilité inférieur ou égal à* α*.*

Le théorème précédent implique en particulier que tout sous-groupe de type fini de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0,1[)$ et à croissance sous-exponentielle est abélien. Ceci généralise un résultat classique démontré par J. Plante et W. Thurston dans [41], suivant lequel les sous-groupes nilpotents de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0,1[)$ sont abéliens (rappelons que les groupes nilpotents sont à croissance polynomiale ; voir [1]).

La preuve du théorème (A) est basée sur la classification dynamique des groupes résolubles de difféomorphismes de l'intervalle, notamment sur le théorème suivant, qui porte un intérêt en soi.

THÉORÈME (B). *Soit* Γ *un sous-groupe résoluble de* $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0,1[)$ *d'ordre de résolubilité égal à* $k \geq 1$ *et sans point fixe à l'intérieur. Si* $\mathcal{N}(\Gamma)$ *désigne son normalisateur dans* $\mathrm{Diff}_+^1([0,1[)$*, alors on a les possibilités suivantes :*

(i) *si* $k > 1$ *alors* $\mathcal{N}(\Gamma)$ *est résoluble d'ordre de résolubilité égal à* k *;*

(ii) *si* $k = 1$ *et* Γ *n'est pas infini cyclique alors* $\mathcal{N}(\Gamma)$ *est topologiquement conjugué à un sous-groupe (éventuellement non commutatif) du groupe des transformations affines ;*

(iii) *si* $k = 1$ *et* Γ *est infini cyclique alors* $\mathcal{N}(\Gamma)$ *est topologiquement conjugué au groupe des translations.*

Il n'est pas vrai que tout sous-groupe sous-exponentiellement moyennable et de type fini de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0,1[)$ ou de $\mathrm{Afm}_+([0,1[)$ est résoluble. Des exemples illustrant cette situation sont donnés au §6. Cependant, dans ce même paragraphe, nous donnons un aperçu d'une description dynamique des sous-groupes sous-exponentiellement moyennables de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0,1[)$.

3. Rappel sur les difféomorphismes de classe $\mathrm{C}^{1+\mathrm{vb}}$ de l'intervalle

Un difféomorphisme f de classe C^1 de l'intervalle $[0,1[$ (resp. de $[0,1]$) est de classe $\mathrm{C}^{1+\mathrm{vb}}$ si la variation du logarithme de sa dérivée est finie sur chaque sous-intervalle compact $[a,b]$ de $[0,1[$ (resp. sur tout l'intervalle $[0,1]$). On note $\mathrm{Var}(\log(f');[a,b])$ cette variation, c'est-à-dire

$$\mathrm{Var}(\log(f');[a,b]) = \sup_{a=a_0<a_1<\cdots<a_n=b} \sum_{i=1}^{n} |\log(f')(a_i) - \log(f')(a_{i-1})|.$$

On désigne par $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0,1[)$ (resp. $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0,1])$) le groupe des difféomorphismes de classe $\mathrm{C}^{1+\mathrm{vb}}$ de l'intervalle $[0,1[$ (resp. de $[0,1]$). Le lemme suivant est une version généralisée du fameux lemme de N. Kopell. Une preuve tirée de [6] peut être trouvée dans [34].

LEMME (3.1). *Soient f et g deux difféomorphismes directs de l'intervalle $[0,1[$ sur leur images qui fixent 0 et préservent l'orientation. Supposons que f soit de classe $\mathrm{C}^{1+\mathrm{vb}}$ et g de classe C^1, que $f(x) < x$ pour tout $x \in]0,1[$, que $g(x_0) = x_0$ pour certain $x_0 \in]0,1[$, et que chaque $x_n = f^n(x_0)$, $n \in \mathbb{N}$, soit un point fixe de g. Supposons de plus que $g(y) \geq z > y$ (resp. $g(y) \leq z < y$) pour certains $y, z \in]x_1, x_0[$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $g(f^n(y)) < f^n(z)$ (resp. $g(f^n(y)) > f^n(z)$) pour tout $n \geq N$.*

Comme une conséquence du lemme précédent on réobtient le lemme classique de N. Kopell : si f et g sont des difféomorphismes directs et commutants de l'intervalle $[0,1[$ de classe $\mathrm{C}^{1+\mathrm{vb}}$ et C^1 respectivement, et si $\mathrm{Fix}(f)\cap]0,1[= \emptyset$ et $\mathrm{Fix}(g)\cap]0,1[\neq \emptyset$, alors g est l'identité. En particulier, l'action sur $]0,1[$ du centralisateur dans $\mathrm{Diff}_+^1([0,1[)$ d'un tel difféomorphisme f est libre. D'après le théorème de Hölder, cette action est semiconjuguée à celle d'un groupe de translations de la droite (voir [12], page 376). Ce groupe de translations est en fait tout $(\mathbb{R},+)$. Ceci découle d'un théorème dû à G. Szekeres (remarquons que le théorème de Szekeres n'est en général énoncé qu'en classe C^2 ; or, une version subsiste en classe $\mathrm{C}^{1+\mathrm{vb}}$, la démonstration de cette version générale étant une modification subtile de celle qui apparaît dans [49]). De plus, la semiconjugaison est en fait une conjugaison topologique. Ceci résulte par exemple du lemme élémentaire suivant, lequel est bien connu des spécialistes et se trouve implicite dans [34].

LEMME (3.2). *Soit Γ un sous-groupe de $\mathrm{Diff}_+^1([0,1[)$ qui est semiconjugué à un sous-groupe dense du groupe de translations. Si Γ contient un élément de classe $\mathrm{C}^{1+\mathrm{vb}}$ sans point fixe à l'intérieur de $[0,1]$, alors Γ est topologiquement conjugué au groupe de translations correspondant.*

Preuve. Supposons que Γ soit un sous-groupe de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0,1[)$ qui est semiconjugué à un groupe dense de translations sans y être conjugué, et soit $f \in \Gamma$ l'élément donné par l'hypothèse. Sans perdre en généralité, on peut supposer que f est envoyé par l'homomorphisme induit par la semiconjugaison sur la translation $T_{-1} : x \mapsto x-1$; en particulier, on a $f(x) < x$ pour tout $x \in]0,1[$. Fixons un intervalle $[a,b]$ qui soit envoyé sur un seul point par la semiconjugaison, et qui soit maximal pour cette propriété. Par la définition de $[a,b]$, il existe une suite croissante d'entiers positifs (n_i) telle que pour chaque $i \in \mathbb{N}$ il existe $\bar{f}_i \in \Gamma$ qui pour tout $n \in \mathbb{N}$ vérifie

$$\bar{f}_i^{n_i}(f^n(a)) \geq f^{n+1}(a), \qquad \bar{f}_i^{n_i+1}(f^n(a)) < f^{n+1}(a),$$
$$\bar{f}_i^{n_i}(f^n(b)) \geq f^{n+1}(b), \qquad \bar{f}_i^{n_i+1}(f^n(b)) < f^{n+1}(b).$$

Notons $a_n = f^n(a)$, $b_n = f^n(b)$. En prenant la limite lorsque n tend vers l'infini dans les inégalités

$$\frac{\bar{f}_i^{n_i+1}(a_n)}{a_n} < \frac{f(a_n)}{a_n} \leq \frac{\bar{f}_i^{n_i}(a_n)}{a_n},$$

on obtient

$$(\bar{f}_i'(0))^{n_i+1} \leq f'(0) \leq (\bar{f}_i'(0))^{n_i}. \tag{3.3}$$

Pour $n \geq 0$ les intervalles $f^n(]\bar{f}_i(a), b[)$ sont deux à deux disjoints. Si l'on note $\delta = \mathrm{Var}(\log(f'); [0,b])$, alors pour tout u, v appartenant à $]\bar{f}_i(a), b[$ on a

$$\left|\log\left(\frac{(f^n)'(v)}{(f^n)'(u)}\right)\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \left|\log(f')(f^{i-1}(v)) - \log(f')(f^{i-1}(u))\right| \leq \delta. \tag{3.4}$$

En prenant la limite lorsque n tend vers l'infini dans l'inégalité

$$|\bar{f}_i([a,b])| = |f^{-n}\bar{f}_i f^n([a,b])| \geq \frac{\inf_{u\in[\bar{f}_i(a),b]}(f^n)'(u)}{\sup_{v\in[\bar{f}_i(a),b]}(f^n)'(v)} \cdot \inf_{x\in[f^n(a),f^n(b)]} \bar{f}_i'(x) \cdot |[a,b]|,$$

et en utilisant les estimées (3.3) et (3.4) on obtient, pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$|\bar{f}_i([a,b])| \geq \exp(-\delta) \cdot (f'(0))^{1/n_i} \cdot |[a,b]| \geq C.$$

Néanmoins, ceci est absurde, car $|\bar{f}_i([a,b])|$ tend évidemment vers zéro lorsque i tend vers l'infini. □

4. Rappel sur les groupes résolubles de difféomorphismes

Désignons par $r(1)$ la famille des groupes qui sont conjugués à des groupes non triviaux de translations. Désignons par $r(2)$ la famille de groupes qui sont soit conjugués à des sous-groupes non commutatifs du groupe affine, soit des produits semidirects entre $(\mathbb{Z},+)$ et un sous-groupe d'un produit direct (au plus dénombrable) de groupes conjugués à des groupes de translations non triviaux. Pour $k > 2$ définissons par récurrence la famille $r(k)$ des groupes qui sont des produits semidirects entre $(\mathbb{Z},+)$ et un sous-groupe d'un produit direct (au plus dénombrable) de groupes de $\mathcal{R}(k-1) = r(1) \cup \cdots \cup r(k-1)$, de telle sorte qu'au moins l'un des facteurs n'appartient pas à $\mathcal{R}(k-2)$. Voici l'un des résultats principaux de [34].

THÉORÈME. *Si* Γ *est un sous-groupe résoluble de* $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0,1[)$ *sans point fixe à l'intérieur de* $[0,1[$ *et d'ordre de résolubilité égal à* k*, alors* Γ *appartient à la famille* $r(k)$*.*

Bien sûr, celle-ci est une description plutôt algébrique des groupes résolubles de difféomorphismes de l'intervalle. Cependant, au cours de la démonstration de ce résultat on décrit de manière assez claire la dynamique de ces groupes. Nous donnons dans la suite un résumé de cette description (la vérification des détails est immédiate à partir de [34]).

Rappelons d'abord qu'on dit qu'un intervalle (non réduit à un point) est une *composante irréductible* pour l'action d'un groupe s'il est invariant par ce groupe et aucun sous-intervalle fermé n'est invariant. Fixons un sous-groupe résoluble Γ de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0,1[)$ d'ordre de résolubilité égal à k et sans point fixe à l'intérieur de $[0,1[$. Notons

$$\{id\} = \Gamma_0^{\mathrm{sol}} \lhd \Gamma_1^{\mathrm{sol}} \lhd \cdots \lhd \Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol}} \lhd \Gamma_k^{\mathrm{sol}} = \Gamma$$

la série dérivée de Γ, c'est-à-dire que $\Gamma_{i-1}^{\mathrm{sol}} = [\Gamma_i^{\mathrm{sol}}, \Gamma_i^{\mathrm{sol}}]$ et $\Gamma_1^{\mathrm{sol}} \neq \{id\}$. Fixons une composante irréductible quelconque $[u_1, v_1[$ de Γ_1^{sol}, et pour $i \geq 2$ définissons par récurrence $[u_i, v_i[$ comme étant la composante irréductible de Γ_i^{sol} qui contient $[u_{i-1}, v_{i-1}[$. Pour chaque $i \geq 1$, le groupe $\Gamma_i^{\mathrm{sol},*}$ constitué des éléments de Γ qui fixent ces composantes irréductibles est distingué dans Γ, et il est lui aussi un groupe résoluble (son ordre de résolubilité est égal à i lorsque $i \geq 2$, mais pour $i = 1$ il peut être égal à 2). Si $k \geq 2$ et Γ n'est pas conjugué à un sous-groupe du groupe affine, alors le groupe $\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*}$ est constitué des éléments de Γ qui possèdent des points fixes sur $]0,1[$. Deux cas peuvent se présenter, en justifiant ainsi la dichotomie de la définition de la famille $r(2)$.

Premier cas : les intervalles $[u_1, v_1[$ et $[u_2, v_2[$ coïncident.

Dans ce cas, la restriction de Γ_2^{sol} à $[u_2, v_2[$ est conjuguée à un groupe de transformations affines. Pour $i \in \{3, \cdots, k\}$ il existe un élément $f_i \in \Gamma_i^{\mathrm{sol}}$ de sorte que les intervalles $f_i(]u_{i-1}, v_{i-1}[)$ et $]u_{i-1}, v_{i-1}[$ sont disjoints, tel que le quotient $\Gamma_i^{\mathrm{sol}}|_{[u_i,v_i]}/\Gamma_{i-1}^{\mathrm{sol}}|_{[u_i,v_i]}$ (resp. $\Gamma_i^{\mathrm{sol},*}|_{[u_i,v_i]}/\Gamma_{i-1}^{\mathrm{sol},*}|_{[u_i,v_i]}$) est un groupe infini cyclique engendré par $f_i\Gamma_{i-1}^{\mathrm{sol}}|_{[u_i,v_i]}$ (resp. par $f_i\Gamma_{i-1}^{\mathrm{sol},*}|_{[u_i,v_i]}$), et tel que les points fixes de f_i à gauche et à droite de $[u_{i-1}, v_{i-1}[$ sont u_i et v_i respectivement.

Deuxième cas : les intervalles $[u_1, v_1[$ et $[u_2, v_2[$ ne coïncident pas.

Dans ce cas, la restriction de Γ_1^{sol} à $[u_1, v_1[$ est conjuguée à l'action d'un groupe de translations. Pour $i \in \{2, \cdots, k\}$ il existe un élément $f_i \in \Gamma_i^{\mathrm{sol}}$ de sorte que les intervalles $f_i(]u_{i-1}, v_{i-1}[)$ et $]u_{i-1}, v_{i-1}[$ sont disjoints, tel que le quotient $\Gamma_i^{\mathrm{sol}}|_{[u_i,v_i]}/\Gamma_{i-1}^{\mathrm{sol}}|_{[u_i,v_i]}$ (resp. $\Gamma_i^{\mathrm{sol},*}|_{[u_i,v_i]}/\Gamma_{i-1}^{\mathrm{sol},*}|_{[u_i,v_i]}$) est un groupe infini cyclique engendré par $f_i\Gamma_{i-1}^{\mathrm{sol}}|_{[u_i,v_i]}$ (resp. par $f_i\Gamma_{i-1}^{\mathrm{sol},*}|_{[u_i,v_i]}$), et tel que les points fixes de f_i à gauche et à droite de $[u_{i-1}, v_{i-1}[$ sont u_i et v_i respectivement.

Remarquons finalement que pour un même groupe Γ les deux possibilités ci-dessus peuvent coexister (bien entendu, sur des composantes irréductibles de $\Gamma_2^{\mathrm{sol},*}$ dont les orbites par Γ sont disjointes). Il faut tenir en compte aussi que chaque $\Gamma_i^{\mathrm{sol},*}$ peut avoir des composantes irréductibles disjointes de l'intérieur de toute composante irréductible de $\Gamma_1^{\mathrm{sol},*}$. Cependant, la restriction de $\Gamma_i^{\mathrm{sol},*}$

à ces composantes est résoluble d'ordre de résolubilité au plus égale à $i-1$. Pour cette restriction la description donnée plus-haut peut être appliquée une nouvelle fois...

Si l'on ajoute à ce qui précède la proposition de rigidité 2.3 de [34], alors on a une description assez précise de la dynamique des groupes résolubles de difféomorphismes de l'intervalle. Dans la suite nous utiliserons cette description dynamique pour démontrer le théorème (B). Remarquons que les énoncés (ii) et (iii) de ce théorème sont élémentaires et ont été déjà démontrés dans [34]. Le cas où $k=2$ et Γ est conjugué à un sous-groupe du groupe affine est aussi élémentaire. Dans les autres cas, nous allons décrire la dynamique de $\mathcal{N}(\Gamma)$ en plusieurs étapes mais de manière assez claire.

Affirmation 1 *:* le groupe $\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*}$ est distingué dans $\mathcal{N}(\Gamma)$.

Ceci découle du fait qu'un élément de Γ appartient à $\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*}$ si et seulement s'il possède des points fixes à l'intérieur de $[0,1[$, et cette propriété est préservée par conjugaison.

Notons qu'une conséquence de cette affirmation est le fait que le groupe $\mathcal{N}(\Gamma)/\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*}$ agit comme un groupe de permutations des composantes irréductibles de $\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*}$.

Affirmation 2 *:* l'action de $\mathcal{N}(\Gamma)/\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*}$ sur cet ensemble de composantes irréductibles est libre.

Pour tout $f\in\mathcal{N}(\Gamma)$, l'élément $ff_kf^{-1}\in\Gamma$ n'a pas de point fixe sur $]0,1[$. Plus précisément, pour tout $x\in]0,1[$ on a $ff_kf^{-1}(x)<x$. Il existe donc $n\in\mathbb{N}$ et $g\in\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*}$ dépendant de f tels que ff_kf^{-1} s'exprime sous la forme f_k^ng. D'autre part, pour toute composante irréductible $[u_{k-1},v_{k-1}[$ de $\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*}$, l'ensemble des composantes $f_k^j([u_{k-1},v_{k-1}[)$, $j\in\mathbb{Z}$, est préservé par cet élément ff_kf^{-1}. On en déduit aisément que $n=1$, et donc ff_kf^{-1} s'exprime sous la forme f_kg pour certain élément $g\in\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*}$.

Supposons que l'action en question ne soit pas libre et fixons une composante irréductible $[u_{k-1},v_{k-1}[$ de $\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*}$ et un élément $f\in\mathcal{N}(\Gamma)$ tels que f fixe $[u_{k-1},v_{k-1}[$ et tels qu'il existe une composante irréductible $[a,b[$ de $\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*}$ contenue dans $[f_k(v_{k-1}),u_{k-1}]$ vérifiant $f(a)\geq b$. Notons u et v les points fixes de f à gauche et à droite de $[a,b[$ respectivement. Remarquons que $u\geq f_k(v_{k-1})$ et $v\leq u_{k-1}$ (voir la figure 1). Pour tout $n\in\mathbb{N}$ il existe $g_n\in\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*}$ tel que $ff_k^nf^{-1}=f_k^ng_n$, et donc $f_k^{-n}f^jf_k^n=(g_nf)^j$ pour tout $j,n\in\mathbb{N}$. Les intervalles $f_k^n([u_{k-1},v_{k-1}[)$, $n\in\mathbb{N}$, sont donc fixés par f. Par conséquence, $f'(0)=1$.

Notons $\delta=V(f_k;[0,v_{k-1}])$. L'estimée (3.4) appliquée à f_k permet de montrer que pour tout point $x\in]f_k(v_{k-1}),u_{k-1}[$ on a

$$\begin{aligned}((g_nf)^j)'(x)&=(f_k^{-n}f^jf_k^n)'(x)\\&\leq\frac{(f_k^n)'(x)}{(f_k^n)'(f_k^{-n}f^jf_k^n(x))}\cdot\sup_{y\in[0,f_k^n(u_{k-1})[}(f^j)'(y)\leq e^{\delta}\cdot\sup_{y\in[0,f_k^n(u_{k-1})[}(f^j)'(y).\end{aligned}$$

Puisque $f'(0)=1$, pour $n\in\mathbb{N}$ suffisamment grand on a $((g_nf)^j)'(x)\leq 2e^{\delta}$ pour tout $j\in\mathbb{N}$ et tout $x\in]f_k(v_{k-1}),u_{k-1}[$. De même, on a $((g_nf)^j)'(x)\geq 1/2e^{\delta}$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]f_k(v_{k-1}), u_{k-1}[$ dès que $n \in \mathbb{N}$ est suffisamment grand. Fixons un tel entier positif n. En intégrant ces deux dernières inégalités on obtient $u + (x-u)/2e^\delta \leq (g_n f)^j(x) \leq u + 2e^\delta(x-u)$ pour tout $x \in]u, v[$. En particulier, en notant $[a_m, b_m] = f^{-m}([a,b])$, pour tout $j, m \in \mathbb{N}$ on a

$$u + (a_m - u)/2e^\delta \leq (g_n f)^j(a_m) \leq u + 2e^\delta(a_m - u). \tag{4.1}$$

Puisque l'élément g_n appartient à $\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*}$, il fixe les intervalles $[a_m, b_m[$, et donc $(g_n f)^j(a_m) = f^j(a_m)$ pour tout $j, m \in \mathbb{N}$. Fixons m suffisamment grand de sorte que $u + 2e^\delta(a_m - u) < v$. Puisque $f^j(a_m)$ tend vers v lorsque j tend vers l'infini, pour $j \in \mathbb{N}$ suffisamment grand on a $f^j(a_m) > u + 2e^\delta(a_m - u)$. On obtient ainsi

$$(g_n f)^j(a_m) > u + 2e^\delta(a_m - u),$$

ce qui contredit l'inégalité à gauche dans (4.1). Ceci finit la preuve de l'affirmation.

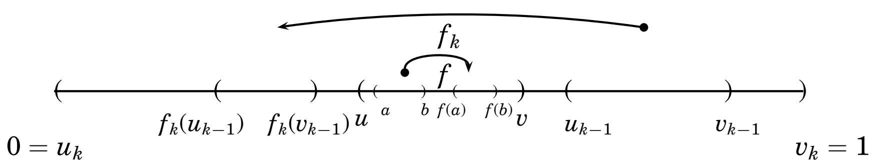

Figure 1

Fixons une composante irréductible quelconque $[u_{k-1}, v_{k-1}[$ de $\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*}$ et définissons une relation d'ordre $\prec$ sur $\mathcal{N}(\Gamma)/\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*}$ par $f_1\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*} \prec f_2\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*}$ lorsque $f_1([u_{k-1}, v_{k-1}[)$ est à gauche de $f_2([u_{k-1}, v_{k-1}[)$. Cette relation est totale, bi-invariante et archimédienne. L'argument de la preuve du théorème de Hölder (voir [12]) montre alors qu'il existe une suite exacte

$$0 \longrightarrow \Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*} \longrightarrow \mathcal{N}(\Gamma) \longrightarrow \mathrm{H} \subset (\mathbb{R}, +) \longrightarrow 0.$$

Notons que l'image H est non triviale, car Γ ne fixe pas l'intervalle $[u_{k-1}, v_{k-1}[$.

Affirmation 3 *:* le groupe H est infini cyclique.

Dans le cas contraire le groupe $\mathcal{N}(\Gamma)$ serait semiconjugué à un groupe de translations sans y être conjugué, ce qui contredit le lemme (3.2).

Fixons un élément $\bar{f}_k$ tel que l'image de $\bar{f}_k\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*}$ engendre ce groupe infini cyclique H et tel que l'intervalle $\bar{f}_k(]u_{k-1}, v_{k-1}[)$ soit à gauche de $]u_{k-1}, v_{k-1}[$. Il existe un entier positif n_k tel que $\bar{f}_k^{\,n_k}\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*} = f_k\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*}$. Le quotient entre $\mathcal{N}(\Gamma)/\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*}$ et $\Gamma/\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*}$ est isomorphe au groupe fini cyclique d'ordre n_k, à cause de ce qui précède et de l'affirmation suivante.

Affirmation 4 *:* le stabilisateur dans $\mathcal{N}(\Gamma)$ des composantes irréductibles de $\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*}$ agit trivialement sur le complément de ces composantes.

Supposons le contraire et fixons un intervalle $[a, b]$ contenu dans le complément des composantes irréductibles de $\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*}$ tel qu'il existe $f \in \mathcal{N}(\Gamma)$ qui fixe ces composantes et qui vérifie $f(a) \geq b$. Notons u et v les points fixes de f à gauche et à droite de $[a,b]$ respectivement. L'élément ff_kf^{-1} s'exprime sous la forme f_kg pour certain $g \in \Gamma^{\mathrm{sol},*}_{k-1}$. On a ainsi $f_k^{-1}ff_k = gf$. Pour $n \in \mathbb{N}$ notons $a_n = f_k^n(a)$ et $b_n = f_k^n(b)$. Puisque g appartient à $\Gamma^{\mathrm{sol},*}_{k-1}$, il fixe les points de l'intervalle $[u,v]$. D'après l'égalité $f_k^{-n}ff_k^n = (gf)^n$ on obtient $f_k^{-n}ff_k^n(a) = (gf)^n(a) = f^n(a) \geq b$, et donc $f(a_n) \geq b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, contredisant ainsi le lemme (3.1).

Pour continuer la preuve du théorème (B), on raisonne par récurrence. À un sous-groupe distingué d'indice fini près (et pour lequel le quotient respectif est fini et cyclique), on se ramène à considérer le sous-groupe $\mathcal{N}_{k-1}(\Gamma)$ de $\mathcal{N}(\Gamma)$ constitué des éléments qui fixent les composantes irréductibles de $\Gamma^{\mathrm{sol},*}_{k-1}$. Si $[u_{k-1}, v_{k-1}[$ est une composante irréductible de $\Gamma^{\mathrm{sol},*}_{k-1}$ alors la restriction $\Gamma^{\mathrm{sol},*}_{k-1}|_{[u_{k-1},v_{k-1}[}$ est distinguée dans la restriction $\mathcal{N}_{k-1}(\Gamma)|_{[u_{k-1},v_{k-1}[}$. On peut donc appliquer les arguments précédents sur $[u_{k-1}, v_{k-1}[$: le quotient entre les deux groupes correspondants est un groupe fini cyclique.

On peut continuer à appliquer ce raisonément à la restriction de $\Gamma^{\mathrm{sol},*}_i$ à chacune de ses composantes irréductibles $[u_i, v_i[$ tant que l'on ne se soit pas ramené à l'un des cas suivants :

(i) la restriction de $\Gamma^{\mathrm{sol},*}_i$ à l'intérieur de $[u_i, v_i[$ est conjuguée à un sous-groupe non commutatif du groupe affine ;

(ii) la restriction de $\Gamma^{\mathrm{sol},*}_i$ à l'intérieur de $[u_i, v_i[$ est conjuguée à un sous-groupe non trivial du groupe des translations.

Affirmation 5 *:* dans ces deux derniers cas, la restriction de tout $f \in \mathcal{N}_i(\Gamma)$ à $[u_i, v_i[$ coïncide avec la restriction d'un élément de $\Gamma^{\mathrm{sol},*}_i$ à ce même intervalle.

Par récurrence on vérifie aisément que la restriction de ff_kf^{-1} à $[u_i, v_i[$ est égale à celle d'un élément qui s'exprime sous la forme f_kg pour certain $g \in \Gamma^{\mathrm{sol},*}_i$. Sur l'intervalle $[u_i, v_i[$ on obtient ainsi $f_k^{-1}ff_k = gf$, et donc $f_k^{-1}f^nf_k = (gf)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'argument de contrôle de la distorsion de la preuve de l'affirmation 2 permet de donner une borne uniforme sur $]u_i, v_i[$ des dérivées des applications $f_k^{-1}f^nf_k$, $n \in \mathbb{N}$. Ceci entraîne que la restriction de gf à $]u_i, v_i[$ est l'identité, et donc la restriction de f à $[u_i, v_i[$ coïncide avec celle de l'élément $g^{-1} \in \Gamma^{\mathrm{sol},*}_i$.

Le théorème (B) découle aisément des affirmations précédentes.

Remarque (4.2). Notons qu'au cours de la preuve du théorème (C) nous avons démontré un fait qui *a priori* n'était pas évident : pour $i \in \{1, \cdots, k\}$, chacun des sous-groupes $\Gamma^{\mathrm{sol},*}_i$ de Γ est distingué dans $\mathcal{N}(\Gamma)$. L'étude de la suite de groupes résolubles $\Gamma \subset \mathcal{N}(\Gamma) \subset \mathcal{N}(\mathcal{N}(\Gamma)) \subset \ldots$ semble être intéressante. Par exemple, on peut se demander si cette suite se stabilise en un nombre fini de pas ou si elle croît à chaque étape.

Malheureusement, il est difficile de donner des résultats précis sur la structure du groupe quotient $\mathcal{N}(\Gamma)/\Gamma$. Ceci est dû au fait que $\mathcal{N}(\Gamma)$ peut contenir des difféomorphismes qui sont des «produits infinis» d'éléments de Γ dont les intérieurs des supports sont deux à deux disjoints. Voici un exemple d'une telle situation.

Exemple (4.3). Considérons le difféomorphisme f de $[0,1]$ et le champ de vecteurs X du deuxième exemple du §1 de [34]. Définissons un autre champ de vecteurs Y sur $[0,1]$ en posant $Y(x)=X(x)$ si $x\in[a,b]$ et $Y(x)=0$ si $x\notin[a,b]$. Désignons par g le difféomorphisme obtenu en intégrant le champ X au temps 1, et par $\{h^t : t\in\mathbb{R}\}$ le flot associé à Y. Considérons maintenant le groupe Γ engendré par les éléments de ce flot et ceux de la famille $\{g^n f g^{-n} : n\in\mathbb{Z}\}$. C'est un groupe métabélien de difféomorphismes de l'intervalle. D'autre part, le difféomorphisme g appartient évidemment à $\mathcal{N}(\Gamma)$. Cependant, il n'est pas difficile de vérifier que l'on peut choisir les facteurs t_n de la définition du champ X de sorte que g n'appartienne pas à Γ, tout en respectant les propriétés de régularité de X. Notons que pour $x\in[f^{n+1}(b),f^n(b)]$ on a $g(x)=f^n h^{T_n} f^{-n}(x)$, où $T_n=\prod_{i=1}^n t_i$. Le difféomorphisme $g\in\mathcal{N}(\Gamma)$ peut ainsi être pensé comme étant «le produit infini» des éléments $f^n h^{T_n} f^{-n}\in\Gamma$, avec $n\in\mathbb{Z}$.

Remarque (4.4). Une lecture attentive des arguments de [32] permet de vérifier que le théorème (B) s'étend au groupe $\mathcal{G}_+^{\omega}(\mathbb{R},0)$ (resp. $\hat{\mathcal{G}}_+^{\omega}(\mathbb{R},0)$) des germes de difféomorphismes (resp. de difféomorphismes formels) analytiques réels de la droite qui fixent l'origine et préservent l'orientation (voir la proposition 3.4 de [13]). Plus précisément, le normalisateur de tout sous-groupe résoluble Γ de $\mathcal{G}_+^{\omega}(\mathbb{R},0)$ ou de $\hat{\mathcal{G}}_+^{\omega}(\mathbb{R},0)$ est résoluble (et donc métabélien : voir le §6 de [34]). Dans ce contexte, la structure du groupe quotient $\mathcal{N}(\Gamma)/\Gamma$ est à peu près claire. Des résultats analogues sont valables dans $\mathrm{Diff}_+^{\omega}(\mathrm{S}^1)$, $\mathrm{Diff}_+^{\omega}([0,1[)$ et $\mathrm{Diff}_+^{\omega}(\mathbb{R})$ (ceci est à comparer avec [5]).

Les propriétés de rigidité des sous-groupes résolubles de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0,1[)$ discutées plus haut donnent lieu à d'autres questions intéressantes. En voici deux exemples.

Exemple (4.5). Rappelons que deux groupes de type fini sont dits *quasi-isométriques* si leurs graphes de Cayley associés sont des espaces métriques quasi-isométriques (voir [14] pour plus de détails). Quelques propriétés algébriques, telles que la nilpotence et la moyennabilité, sont invariantes (à indice fini près) par quasi-isométrie. La résolubilité ne l'est cependant pas : un exemple concernant ce phénomène peut être trouvé dans [10]. La question qui se pose de manière naturelle dans notre contexte est la suivante : si Γ_1 est un sous-groupe résoluble et de type fini de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0,1[)$ et Γ_2 est un groupe quasi-isométrique à Γ_1, alors Γ_2 est-il virtuellement résoluble ?

Exemple (4.6). Étant donné un groupe Γ engendré par une famille $\Gamma^1=\{f_i\}$ d'éléments, on pose $\Gamma(0)=\{id\}$, $\Gamma(1)=\Gamma^1$, et pour $k\geq 2$ on définit par récurrence

$$\Gamma(k)=\{[f^{\pm1},g^{\pm1}] : f\in\Gamma(k-1), g\in\Gamma(k-1)\cup\Gamma(k-2)\}.$$

On dit que Γ est *pseudo-résoluble* s'il existe $n\geq 1$ tel que $\Gamma(n)$ est réduit à l'identité.

Remarquons que si l'on définit de manière analogue la notion de *pseudo-nilpotence*, alors il est facile à démontrer que tout groupe pseudo-nilpotent est en fait nilpotent. L'existence de groupes pseudo-résolubles et non résolubles a été déjà remarquée dans [13]. Dans ce même article, il est démontré que tout sous-groupe pseudo-résoluble de $\mathrm{Diff}_+^{\omega}(\mathrm{S}^1)$ est résoluble. Nous ignorons si ceci reste vrai pour les sous-groupes de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}(\mathrm{S}^1)$ ou de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0,1[)$.

5. Sous-groupes à croissance sous-exponentielle de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0,1[)$

Parmi les groupes à croissance exponentielle on trouve les groupes fondamentaux de variétés compactes à courbure négative (voir [31] et [44]), les groupes résolubles non virtuellement nilpotents (voir [1], [30] et [48]), les sous-groupes non virtuellement nilpotents des groupes de Lie (voir [46]). Enfin, si Γ contient un semigroupe libre à deux générateurs alors sa croissance est exponentielle, mais la réciproque n'est pas toujours valable (voir [37]). D'autre part, un théorème célèbre dû à M. Gromov stipule qu'un groupe de type fini est à croissance polynomiale si et seulement si il contient un sous-groupe nilpotent d'indice fini (voir [21]).

Le résultat général suivant est à comparer avec quelques résultats obtenus par J. Plante et W. Thurston dans [41], suivant lesquels tout sous-groupe nilpotent de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0,1[)$ (resp. de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}(\mathbb{R})$) est abélien (resp. métabélien). À la fin de ce paragraphe nous étudierons un contre-exemple à la proposition ci-dessous dans le cas où l'hypothèse de régularité n'est pas satisfaite.

PROPOSITION (5.1). *Si Γ est un sous-groupe à croissance sous-exponentielle de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0,1[)$ (resp. de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}(\mathbb{R})$), alors Γ est abélien (resp. métabélien).*

La preuve de cette proposition sera obtenue à partir de quelques lemmes dont les idées seront importantes dans la suite. Commençons par formaliser un critère simple et bien connu pour trouver des semigroupes libres à l'intérieur d'un groupe d'homéomorphismes de la droite.

LEMME (5.2). *Soient f et g deux homéomorphismes directs de la droite. Supposons qu'il existe un intervalle $[a,b]$ tel que $\mathrm{Fix}(f)\cap[a,b]=\{a,b\}$ et tel que soit $g(a)\in]a,b[$, soit $g(b)\in]a,b[$. Alors le groupe engendré par f et g contient un semigroupe libre à deux générateurs.*

Preuve. Supposons le premier cas, l'autre étant analogue. Quitte à changer f par son inverse, on peut supposer que $f(x)<x$ pour tout $x\in]a,b[$. Notons $c=g(a)\in]a,b[$ et fixons un point $d'\in]c,b[$. Puisque $gf^n(a)=c$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et puisque $gf^n(d')$ converge vers c lorsque n tend vers l'infini, pour n suffisamment grand il existe au moins un point fixe de gf^n sur $[a,d']$. Fixons un tel entier positif N et considérons l'infimum d des points fixes de gf^N sur $]a,b[$. Pour $M\in\mathbb{N}$ suffisamment grand on a $f^M(d)<c$. Une application simple du lemme du ping-pong de Klein sur $[a,b]$ montre finalement que le semigroupe engendré par f^M et gf^N est libre (voir [22]). □

Le lemme (3.1) permet d'établir un autre critère pour trouver des semigroupes libres dans des sous-groupes de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0,1[)$ qui sera assez souvent utilisé. Il jouera parfois le rôle de l'un des résultats de [43] (voir aussi [27]), suivant lequel tout groupe de type fini, résoluble et non virtuellement nilpotent, contient un semigroupe libre à deux générateurs.

LEMME (5.3). *Soient f et g deux éléments de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0,1[)$ tels que $f(x)<x$ pour tout $x\in]0,1[$ et soit $[u,v]$ un intervalle contenu dans $]0,1[$ tel que $g(x)<x$*

pour tout $x \in]u, v[$, $g(u) = u$, $g(v) = v$ *et* $f(v) \leq u$. *Soit* $[a, b] \subset]u, v[$ *un intervalle tel que* $g(b) \leq a$. *Supposons que pour chaque* $n \in \mathbb{Z}$ *on ait que soit* $f^{-n} g^i f^n([a, b])$ *est égal à* $g^i([a, b])$ *pour tout* $i \in \mathbb{Z}$, *soit* $f^{-n} g^i f^n([a, b])$ *est égal à* $g^{-i}([a, b])$ *pour tout* $i \in \mathbb{Z}$, *soit* $f^{-n} g^i f^n([a, b])$ *est égal à* $[a, b]$ *pour tout* $i \in \mathbb{Z}$. *Alors le semigroupe engendré par* f *et* g *est libre.*

Preuve. Par commodité, pour $n \in \mathbb{Z}$ notons $a_n = f^n(a)$. D'après l'hypothèse et le lemme (3.1), pour $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand on a $g(a_n) = a_n$. Fixons le plus petit de ces entiers positifs N. Soient $A = f^n g^{m_r} f^{n_r} \cdots g^{m_1} f^{n_1}$ et $B = g^q f^{p_s} g^{q_s} \cdots f^{p_1} g^{q_1}$ deux mots, avec m_i, n_i, p_i, q_i des entiers positifs, $n \geq 0$ et $q \geq 0$. On doit démontrer que A et B ne représentent pas le même élément du groupe engendré par f et g. Pour cela il suffit de remarquer que, par la définition de N, on a $A(a_{N-1}) = a_M$, où $M = N - 1 + n + \sum_i n_i$, alors que si l'on note $M' = \sum_i p_i$ on a $B(a_{N-1}) = f^{M'}(g^{q_1}(a_{N-1}))$, et ce dernier point ne peut pas être égal à aucun des a_n, comme l'on vérifie aisément à partir du fait que $g^{q_1}(a_{N-1}) \neq a_{N-1}$. □

Voici finalement un lemme qui donne la structure des groupes virtuellement abéliens de difféomorphismes de l'intervalle.

LEMME (5.4). *Soit* Γ *un sous-groupe de* $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0, 1[)$. *Si* Γ *contient un sous-groupe abélien d'indice fini alors* Γ *lui aussi est abélien.*

Preuve. Soit $[a, b[$ l'une des composantes irréductibles du sous-groupe abélien d'indice fini Γ_0. Il est facile de voir que $[a, b[$ est aussi une composante irréductible de Γ. On se ramène ainsi au cas où Γ_0 n'a pas de point fixe à l'intérieur de $[0, 1[$. D'après le §3, le groupe Γ_0 est contenu dans le flot topologique associé à n'importe quel de ces éléments non triviaux. Si f appartient à Γ alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que f^n appartient à Γ_0. Le difféomorphisme f^n appartient donc au flot qui contient Γ_0. Par conséquence, f lui aussi appartient à ce flot. On en déduit que Γ est contenu dans un groupe à un paramètre. En particulier, il est abélien. □

Remarque (5.5). Le lemme précédent s'étend aux groupes résolubles. Plus précisément, si un sous-groupe Γ de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0, 1[)$ contient un sous-groupe d'indice fini et résoluble d'ordre de résolubilité égal à $k \geq 1$, alors Γ lui aussi est résoluble d'ordre k. La preuve est obtenue à l'aide du théorème (B). Ceci est à comparer avec la remarque du §3 de [39], suivant laquelle les sous-groupes virtuellement polycycliques de $\mathrm{Diff}_+^2([0, 1[)$ (et en fait de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0, 1[)$) sont eux aussi polycicliques. Des résultats analogues sont valables pour des sous-groupes virtuellement résolubles de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}(\mathrm{S}^1)$ et de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}(\mathbb{R})$. Finalement, tout sous-groupe virtuellement résoluble de $\hat{\mathcal{G}}_+^{\omega}(\mathbb{R}, 0)$ est métabélien. Ce dernier fait est obtenu aisément à partir de la classification de Nakai (voir [32] ou bien [13] et [34]).

Preuve de la proposition (5.1). Considérons d'abord le cas de l'intervalle. Sans perte de généralité, on peut supposer que Γ n'a pas de point fixe sur $]0, 1[$. Comme la croissance de Γ est sous-exponentielle, il existe une mesure de Radon ν sur $]0, 1[$ qui est invariante par l'action de Γ (voir [40]). Si cette mesure n'a pas d'atome alors Γ est semiconjugué à un sous-groupe dense du groupe des translations. D'après le lemme (3.2), Γ est conjugué à un groupe de translations. En particulier, Γ est abélien.

Supposons maintenant que ν possède (au moins) un atome $p \in]0,1[$. Soient $p_n, n \in \mathbb{Z}$, les points de l'orbite de $p = p_0$ ordonnés de manière telle que $p_n > p_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Il existe $f \in \Gamma$ tel que $f(p) = p_1$, et donc $f^n(p) = p_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Le groupe des commutateurs $\Gamma' = [\Gamma, \Gamma]$ est contenu dans le stabilisateur Γ^* des intervalles $[p_{n+1}, p_n]$. Pour finir la preuve de l'abélianité de Γ, nous allons montrer que cet stabilisateur Γ^* est trivial.

Supposons le contraire. Le groupe Γ^* est distingué dans Γ et Γ/Γ^* est isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$; son générateur est $f\Gamma^*$. Supposons d'abord que la restriction de Γ^* à chacun des intervalles $]p_{n+1}, p_n[$ soit abélienne. Dans ce cas Γ est résoluble. D'après [21], [30], [41], [43] ou [48], le fait que Γ est à croissance sous-exponentielle entraîne qu'il est nilpotent à indice fini près. Par le théorème de Plante et Thurston, Γ est abélien à indice fini près (voir [41]). Finalement, d'après le lemme (5.4), Γ est abélien.

Supposons maintenant que la restriction de Γ^* à l'intervalle $]p_1, p_0[$ ne soit pas abélienne et fixons une composante irréductible $[u, v]$ de Γ^* sur laquelle la restriction correspondante ne soit pas conjuguée à un groupe de translations. Par le théorème de Hölder, il existe un élément $h_0 \in \Gamma^*$ et un intervalle $[a, b] \subset [u, v]$ tels que $\mathrm{Fix}(h_0) \cap [a, b] = \{a, b\}$ et tels qu'au moins l'un des points a ou b appartient à $]u, v[$. Par le lemme (5.2), pour tout $h \in \Gamma^*$ on a soit $h([a, b]) = [a, b]$, soit $h(]a, b[) \cap]a, b[= \emptyset$. Considérons la relation d'ordre $\prec$ sur la restriction de Γ^* à $[u, v]$ donnée par $h_1|_{[u,v]} \prec h_2|_{[u,v]}$ si $h_1(]a, b[)$ est à gauche de $h_2(]a, b[)$. Cette relation d'ordre est totale, bi-invariante et archimédienne. L'argument de la preuve du théorème de Hölder plus le lemme (3.2) et le fait que $[a, b]$ n'est pas une composante irréductible de Γ^* entraînent l'existence d'une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{G} \longrightarrow \Gamma^*|_{[u,v]} \longrightarrow (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow 0,$$

où G désigne le stabilisateur dans Γ^* de $[a, b]$. Soit $g \in \Gamma^*$ un élément tel que $g\mathrm{G}$ engendre $\Gamma^*|_{[u,v]}/\mathrm{G} \sim (\mathbb{Z}, +)$. Par définition, l'orbite par Γ^* de l'intervalle $[a, b]$ est égale à $\{g^i([a, b]) : i \in \mathbb{Z}\}$. Nous sommes donc sous les hypothèses du lemme (5.3), et la conclusion de ce lemme permet d'obtenir une contradiction. La preuve de la première partie de la proposition est donc terminée.

Pour finir la preuve complète de la proposition, montrons que la preuve de l'affirmation relative à un groupe Γ à croissance sous-exponentielle de difféomorphismes de la droite peut être obtenue à partir de celle concernant les difféomorphismes de l'intervalle. En effet, ceci est clair si Γ possède au moins un point fixe sur $\mathbb{R}$ (dans ce cas le groupe Γ est abélien). Considérons le cas contraire. Le groupe Γ étant à croissance sous-exponentielle, d'après le théorème de Plante cité plus haut, il existe une mesure de Radon ν sur $\mathbb{R}$ invariante par Γ. Si Γ n'a pas d'atome alors il est semiconjugué à un groupe de translations de la droite. Sinon, l'orbite de tout atome de ν est discrète. Quelque soit le cas, on démontre aisément que le groupe Γ' possède des points fixes sur la droite. Puisque tout sous-groupe de type fini de Γ' est à croissance sous-exponentielle, la première partie de la proposition entraîne qu'un tel sous-groupe doit être abélien. Le groupe Γ' est donc abélien, ce qui montre la métabélianité de Γ. Ceci achève la démonstration. $\square$

La proposition (5.1) n'est pas valable pour des groupes à croissance polynomiale de difféomorphismes de classe C^1 de l'intervalle. En effet, dans [11], B. Farb et J. Franks démontrent que $\mathrm{Diff}_+^1([0,1])$ contient tous les groupes nilpotents de type fini et sans torsion.

En ce qui concerne les groupes à croissance sous-exponentielle, rappelons d'abord qu'une question générale fut posée par J. Milnor dans [29]. Cette question consistait à savoir si tout groupe de type fini est à croissance soit polynomiale soit exponentielle. La réponse (négative) à cette question a été obtenue par R. Grigorchuk, qui a construit dans [16] un exemple d'un groupe de type fini à *croissance intermédiaire*. D'autres exemples de tels groupes apparaissent dans [17]. Le dernier d'entre eux, que nous désignérons par H, se trouve d'être de plus *ordonnable*, comme il fut démontré par la suite dans [19]. Il est donc réalisable comme un sous-groupe du groupe des homéomorphismes directs de la droite (voir [12]). Nous donnerons dans la suite une réalisation plus concrète de ce groupe, ce qui permettra de démontrer qu'il se plonge dans le groupe des homéomorphismes bilipchitziens de $[0,1]$. Nous ignorons si H peut être réalisé comme un groupe de difféomorphismes de classe C^1 de l'intervalle, et en général s'il existe des sous-groupes de $\mathrm{Diff}_+^1([0,1])$ à croissance intermédiaire.

Les exemples de groupes de torsion à croissance intermédiaire construits dans [16] et dans [17] sont obtenus comme des sous-groupes du groupe des isométries d'un arbre enraciné homogène (de valence finie). Nous montrerons que le groupe H considéré au §5 de [17] et dans [19] s'identifie de manière naturelle à un sous-groupe du groupe des isométries de l'arbre enraciné $\mathcal{T}_\infty$ dont la valence de chaque sommet est infinie (dénombrable).

Désignons par Ω l'espace $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, où $\mathbb{N} = \{1, 2, \cdots\}$. Définissons l'application $a : \Omega \to \Omega$ par $a(x_1, x_2, \cdots) = (x_1 + 1, x_2, \cdots)$. Des applications b, c et d sont définies de manière récursive en utilisant la convention $(x_1, (x_2, x_3, \cdots)) = (x_1, x_2, x_3, \cdots)$ et en posant

$$b(x_1, x_2, x_3, \cdots) = \begin{cases} (x_1, a(x_2, x_3, \cdots)), & x_1 \text{ pair ;} \\ (x_1, c(x_2, x_3, \cdots)), & x_1 \text{ impair ;} \end{cases}$$

$$c(x_1, x_2, x_3, \cdots) = \begin{cases} (x_1, a(x_2, x_3, \cdots)), & x_1 \text{ pair ;} \\ (x_1, d(x_2, x_3, \cdots)), & x_1 \text{ impair ;} \end{cases}$$

$$d(x_1, x_2, x_3, \cdots) = \begin{cases} (x_1, x_2, x_3, \cdots), & x_1 \text{ pair ;} \\ (x_1, b(x_2, x_3, \cdots)), & x_1 \text{ impair.} \end{cases}$$

Le groupe H engendré par a, b, c et d s'identifie de manière naturelle à un sous-groupe du groupe des isométries de $\mathcal{T}_\infty$. Il est facile de vérifier que ce groupe est isomorphe à celui considéré dans [19]. Le groupe H peut être pensé aussi comme un sous-groupe du groupe des homéomorphismes du bord à l'infini de $\mathcal{T}_\infty$. C'est en regardant cette action que nous réalisérons le groupe H d'abord comme un groupe *d'homéomorphismes* de l'intervalle $[0,1]$, puis comme un groupe *d'homéomorphismes bilipchitziens* de ce même intervalle.

Comme dans [17], considérons deux homomorphismes ϕ_0 et ϕ_1 du sous-groupe de H engendré par b, c et d vers H définis par

$$\phi_0(b) = a, \quad \phi_0(c) = a, \quad \phi_0(d) = id \;;$$

$$\phi_1(b) = c, \quad \phi_1(c) = d, \quad \phi_1(d) = b.$$

Pour chaque n-uple finie $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ choisissons un nombre $\ell_{x_1,\cdots,x_n} > 0$ de sorte que

$$(5.6) \qquad \sum_{y_1 \in \mathbb{Z}} \ell_{y_1} = 1, \quad \sum_{y_n \in \mathbb{Z}} \ell_{x_1,\cdots,x_{n-1},y_n} = \ell_{x_1,\cdots,x_{n-1}}, \quad \lim_{n \to +\infty} \sup_{x_1,\cdots,x_n \in \mathbb{Z}} \ell_{x_1,\cdots,x_n} = 0.$$

Posons

$$L_{x_1,\cdots,x_n} = L_{x_1,\cdots,x_{n-1}} + \sum_{y_n < x_n} \ell_{x_1,\cdots,x_{n-1},y_n},$$

et définissons l'intervalle $I_{x_1,\cdots,x_n}$ de longueur $\ell_{x_1,\cdots,x_n}$ par

$$I_{x_1,\cdots,x_n} = [L_{x_1,\cdots,x_{n-1},x_n}, L_{x_1,\cdots,x_{n-1},1+x_n}].$$

Notons $\Delta = \cap_{n \in \mathbb{N}} \cup_{y_1,\cdots,y_n} int(I_{y_1,\cdots,y_n})$. Chaque point $p \in \Delta$ est codé par une unique suite $x_1, x_2, \cdots$, de sorte que $p = \cap_{n \geq 1} I_{x_1,\cdots,x_n}$. Notons $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots$ la suite réduite modulo 2 correspondante. Soit n le premier entier positif (s'il existe) tel que $\phi_{\bar{x}_n} \circ \cdots \circ \phi_{\bar{x}_1}(b)$ est égal à id ou à a. Définissons $B(p) = p$ dans le premier cas, et dans le deuxième posons $B(p) = \cap_{k \geq 1} I_{x_1,\cdots,x_{n-1},1+x_n,x_{n+1},\cdots,x_{n+k}}$. Ceci définit l'application B sur un sous-ensemble dense de Δ. Des applications C et D sont définies de manière analogue à partir des éléments c et d de H respectivement. Quant à l'élément $a \in$ H, pour $p = \cap_{n \geq 1} I_{x_1,\cdots,x_n}$ posons simplement $A(p) = \cap_{n \geq 1} I_{1+x_1,x_2,\cdots,x_n}$. Il est facile de montrer à partir de la troisième des propriétés (5.6) que les quatre applications A, B, C et D s'étendent continûment en des homéomorphismes de l'intervalle $[0, 1]$ sur lui même. Le groupe H s'identifie ainsi à un groupe d'homéomorphismes directs de $[0, 1]$.

Pour rendre ces homéomorphismes bilipchitziens il est clair qu'on doit choisir les valeurs des $\ell_{x_1,\cdots,x_n}$ de manière plus soigneuse. Supposons donc que ces suites satisfont (5.6) et que

$$(5.7) \qquad \lim_{|y_n| \to \infty} \sup_{y_{n+1},\cdots,y_{n+k} \in \mathbb{Z}} \left| \frac{\ell_{x_1,\cdots,x_{n-1},1+y_n,y_{n+1},\cdots,y_{n+k}}}{\ell_{x_1,\cdots,x_{n-1},y_n,y_{n+1},\cdots,y_{n+k}}} - 1 \right| = 0$$

pour tout $x_1, \cdots, x_{n-1}$,

$$(5.8) \qquad \text{et} \qquad \sup_{x_1,\cdots,x_{n-1},x_n,\cdots,x_{n+k} \in \mathbb{Z}} \left| \frac{\ell_{x_1,\cdots,x_{n-1},1+x_n,x_{n+1}\cdots,x_{n+k}}}{\ell_{x_1,\cdots,x_{n-1},x_n,x_{n+1},\cdots,x_{n+k}}} - 1 \right| = M < \infty$$

(il est facile de vérifier l'existence de telles suites). Des applications A, B, C et D peuvent alors être définies de la même manière qu'on l'a fait auparavant. La preuve du fait que ces applications s'étendent en des homéomorphismes bilipchitziens de $[0, 1]$ n'est pas compliquée. Nous en donnerons une démonstration indirecte qui montre que H peut être approché (en topologie C^0) par des groupes de difféomorphismes de classe C^1 de $[0, 1]$. Pour cela nous aurons besoin du lemme suivant, dû à J. C. Yoccoz (voir [11]), et dont nous ne donnons que le schéma de la preuve.

LEMME (5.9). *À chaque paire d'intervalles compactes I, J on peut associer un difféomorphisme direct $\psi(I, J)$ de I sur J de classe C^∞ de sorte que*

(i) *pour tout I, J, K on a $\psi(J, K) \circ \psi(I, J) = \psi(I, K)$,*
(ii) *si x est une extrémité de I alors $\psi(I, J)'(x) = 1$,*

(iii) *pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $\delta > 0$ *tel que si* $|1 - |I|/|J|| \leq \delta$ *alors* $\sup_{x \in I} |\psi(I, J)'(x) - 1| \leq \varepsilon$.

Schéma de la preuve. Pour $u > 0$ on considère le difféomorphisme $\psi_u :]0, \pi/u[\to \mathbb{R}$ défini par
$$\psi_u(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{dt}{t^2 + u^2}.$$
Si $a, b > 0$ alors on définit $\psi_{a,b} : [0, a] \to [0, b]$ par $\psi_{a,b}(0) = 0$, $\psi_{a,b}(a) = b$ et $\psi_{a,b}(x) = \psi_{\pi/b} \circ \psi^{-1}_{\pi/a}(x)$ pour $x \in]0, a[$. Finalement, on définit $\psi([a, b], [a', b'])(x) = \psi_{b-a, b'-a'}(x - a) + a'$.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ nous allons définir des difféomorphismes A_n, B_n, C_n et D_n de classe C^1 de $[0, 1]$ de sorte que les différentes suites de dérivées soient unifomément bornées et on ait la convergence (en topologie C^0) de A_n (resp. de B_n, C_n et D_n) vers A (resp. vers B, C et D). Nous allons donner la définition explicite pour B_n, les autres étant analogues. Fixons un point $p \in [0, 1]$. Soit $x_1, \cdots, x_n$ une suite telle que $p \in I_{x_1, \cdots, x_n}$. De nouveau, notons $\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n$ la suite réduite modulo 2 correspondante. Il peut se présenter trois cas :

(i) $\phi_{\bar{x}_n} \circ \cdots \circ \phi_{\bar{x}_1}(b)$ est bien défini et égal à id : dans ce cas posons $B_n(p) = p$;

(ii) il existe un entier positif $k \leq n$ tel que $\phi_{\bar{x}_k} \circ \cdots \circ \phi_{\bar{x}_1}$ est défini sur b et $\phi_{\bar{x}_k} \circ \cdots \circ \phi_{\bar{x}_1}(b) = a$: dans ce cas définissons $B_n(p) = \psi(I_{x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \cdots, x_n}, I_{x_1, \cdots, x_{k-1}, 1+x_k, x_{k+1}, \cdots, x_n})(p)$;

(iii) $\phi_{\bar{x}_n} \circ \cdots \circ \phi_{\bar{x}_1}(b)$ est bien défini et différent de a et de id : dans ce cas posons $B_n(p) = p$.

La propriété (5.7) ainsi que celles des applications $\psi(I, J)$ montrent que A_n, B_n, C_n et D_n sont des difféomorphismes de classe C^1 de l'intervalle.[1] La propriété (5.8) montre que les dérivées de ces applications sont uniformément bornées par une constante $C(M)$. Puisque elles convergent en topologie C^0 vers A, B, C et D respectivement, ces dernières applications sont $C(M)$-lipchitziennes. Pour terminer la preuve du fait que H se réalise comme un groupe d'homéomorphismes bilipchitziens de $[0, 1]$, on peut appliquer l'argument précédent aux inverses de ces applications. Remarquons finalement que la constante M (et donc $C(M)$) peut être choisie aussi proche de 1 que l'on veut.

Remarque (5.10). L'action de H sur l'intervalle est en quelque sorte «naturelle». Le théorème 6.8 de [12], le corollaire 1 de [24] et le lemme 9 de [26] permettent de justifier cette affirmation.

Remarque (5.11). L'élément a^2 appartient au centre du groupe H. Ainsi, pour démontrer que ce groupe ne se plonge pas dans $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0, 1[)$, ce n'est pas nécessaire d'utiliser la proposition (5.1) en toute sa puissance : il suffit d'appliquer directement le lemme de N. Kopell.

[1] Le groupe H_n engendré par A_n, B_n, C_n et D_n est un quotient de H : si l'on regarde l'action de H sur l'arbre enraciné $\mathcal{T}_\infty$, alors H_n s'identifie au quotient de H par le stabilisateur du niveau n de l'arbre.

6. Vers une classification générale

Commençons par donner la preuve du théorème (A). Elle sera faite bien sûr par récurrence sur α. Pour $\alpha = 1$ l'affirmation découle de la proposition (5.1). Supposons maintenant que l'affirmation soit valable pour des sous-groupes sous-exponentiellement moyennables de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0,1[)$ appartenant à SG_k, et soit Γ un sous-groupe sous-exponentiellement moyennable de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0,1[)$ appartenant à SG_{k+1}. La classe SG_{k+1} étant fermée par passage aux quotients, on peut supposer, sans perte de généralité, que Γ n'a pas de point fixe sur $]0,1[$.

Le groupe Γ ayant été obtenu par une opération d'extension, il existe un sous-groupe distingué G de Γ appartenant à SG_k tel que $\mathrm{H} = \Gamma/\mathrm{G}$ appartient à SG_1. Par l'hypothèse de récurrence, le groupe G est résoluble d'ordre de résolubilité $s \leq k$. Désignons par G^* le stabilisateur dans Γ des composantes irréductibles de G. C'est un sous-groupe distingué de Γ. De plus, à partir du théorème (B) on déduit aisément que G^* est résoluble d'ordre de résolubilité au plus égale à $s+1 \leq k+1$. En fait, son ordre de résolubilité est au plus $s \leq k$ lorsque $s \neq 1$.

PROPOSITION (6.1). *Le quotient Γ/G^* est soit trivial soit isomorphe à $(\mathbb{Z},+)$. Dans ce dernier cas, un élément $f \in \Gamma$ engendre Γ/G^* si et seulement si pour toute composante irréductible $[a,b[$ de G^*, les intervalles $]a,b[$ et $f(]a,b[)$ sont disjoints et il n'y a pas de composante irréductible de G^* appartenant à l'orbite de $]a,b[$ par Γ entre ces deux intervalles.*

La preuve de cette proposition est analogue à celle de la proposition (5.1), mais techniquement un peu plus délicate. Elle sera faite en plusieurs étapes.

Affirmation 1 *:* soient $[a,b[$ une composante irréductible de G et f un élément quelconque de Γ qui ne fixe pas $[a,b[$; si u et v désignent les points fixes de f à gauche et à droite de $[a,b[$ respectivement, alors pour tout $g \in \Gamma$ on a soit $g([u,v]) = [u,v]$, soit $g(]u,v[) \cap]u,v[= \emptyset$.

Pour montrer cela, supposons le contraire et considérons le cas où il existe $g \in \Gamma$ tel que $g(u) \in]u,v[$, le cas où $g(v) \in]u,v[$ pour certain $g \in \Gamma$ étant analogue. Quitte à changer f par f^{-1}, on peut supposer que $f(x) < x$ pour tout $x \in]u,v[$. Reprenons les arguments de la preuve du lemme (5.2). Pour M et N suffisamment grands, il existe $d \in]u,v[$ tel que les applications gf^N et f^M vérifient $gf^N(x) > x$ pour tout $x \in]u,d[$, $gf^N(d) = d$ et $f^M(d) < g(u) = gf^N(u)$. Pour $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand, l'intervalle $[a',b'] = f^n([a,b])$ est une composante irréductible de G contenue dans $]u,d[$. Une application du lemme du ping-pong de Klein montre que si h_1 et h_2 sont des mots distincts en des puissances positives de gf^N et f^M, alors $h_1([a',b']) \neq h_2([a',b'])$. Cela entraîne que $h_1\mathrm{G} \neq h_2\mathrm{G}$. Le semigroupe de Γ/G engendré par $gf^N\mathrm{G}$ et $f^M\mathrm{G}$ est donc libre, ce qui contredit le fait que $\mathrm{H} = \Gamma/\mathrm{G}$ appartient à SG_1.

Affirmation 2 *:* avec les notations de l'affirmation 1, on a $u = 0$ et $v = 1$.

Pour montrer cette affirmation, considérons indépendamment les deux possibilités qui peuvent se présenter.

Cas (i) *:* l'action du stabilisateur de $[u,v]$ dans Γ sur l'ensemble des composantes irréductibles de G contenues dans $[u,v]$ est libre.

Dans ce cas, en utilisant l'argument de la preuve du théorème de Hölder, on montre qu'il existe une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{G}^*_{[a,b]} \longrightarrow \Gamma^*_{[u,v]} \longrightarrow \mathrm{H}^* \subset (\mathbb{R}, +) \longrightarrow 0,$$

où $\Gamma^*_{[u,v]}$ désigne la restriction à $[u,v]$ du stabilisateur de $[u,v]$ dans Γ et $\mathrm{G}^*_{[a,b]}$ désigne le stabilisateur de $[a,b]$ dans $\Gamma^*_{[u,v]}$. Soit $h \in \mathrm{G}^*_{[a,b]}$ tel que $h\mathrm{G}^*_{[a,b]}$ n'est pas trivial dans le quotient correspondant. Si $[u,v[\neq [0,1[$ alors il existe $g \in \Gamma$ tel que $g(]u,v[)$ est à gauche de $]u,v[$. En reprenant les arguments de la preuve du lemme (5.3) on constate que si h_1 et h_2 sont des mots en des puissances positives de g et h, alors il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $[a_{N-1}, b_{N-1}] = g^{N-1}([a,b])$ on a $h_1([a_{N-1}, b_{N-1}]) \neq h_2([a_{N-1}, b_{N-1}])$. Puisque $[a_{N-1}, b_{N-1}]$ est une composante irréductible de G, cela entraîne que le semigroupe de Γ/G engendré par gG et hG est libre, ce qui contredit le fait que $\mathrm{H} = \Gamma/\mathrm{G}$ appartient à SG_1.

Cas (ii) *:* l'action du stabilisateur de $[u,v]$ dans Γ sur l'ensemble des composantes irréductibles de G contenues dans $[u,v]$ n'est pas libre.

Fixons dans ce cas un élément $\bar{f} \in \Gamma$ tel qu'il existe un intervalle $[a',b'] \subset [u,v]$ qui contient des composantes irréductibles de G et pour lequel on a $\mathrm{Fix}(\bar{f}) \cap [a',b'] = \{a',b'\}$ et au moins l'un des points a' ou b' appartient à $]u,v[$. L'argument de la preuve de l'affirmation 1 montre que tout élément de G envoie $]a',b'[$ sur lui même ou sur un intervalle disjoint. On démontre ainsi qu'il existe $h \in \mathrm{G}$ tel que $h(]a',b'[) \cap]a',b'[= \emptyset$ et tel que l'orbite de $[a',b']$ par G est l'ensemble $\{h^i([a',b']) : i \in \mathbb{Z}\}$. Si l'on suppose $[u,v[\neq [0,1[$ alors en appliquant les arguments de la fin du cas (i) à l'intervalle $[a',b']$ on obtient une contradiction. Ceci finit la preuve de l'affirmation 2.

Puisque les affirmations 1 et 2 sont valables pour n'importe quelle composante irréductible $[a,b[$ de G, un élément de Γ est dans G^* si et seulement si cet élément fixe au moins une composante irréductible de G. Fixons une telle composante $[a,b[$ et définissons une relation d'ordre $\prec$ sur le groupe quotient Γ/G^* par $f_1\mathrm{G}^* \prec f_2\mathrm{G}^*$ lorsque $f_1(]a,b[)$ est à gauche de $f_2(]a,b[)$. Cette relation est totale, bi-invariante et archimédienne. L'argument de la preuve du théorème de Hölder montre alors qu'il existe une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{G}^* \longrightarrow \Gamma \longrightarrow \mathrm{H}^* \subset (\mathbb{R}, +) \longrightarrow 0.$$

Affirmation 3 *:* le groupe H^* est trivial ou infini cyclique.

En effet, dans le cas contraire le groupe Γ serait semiconjugué à un groupe de translations sans y être conjugué, contredisant le lemme (3.2).

Affirmation 4 *:* le groupe G^* agit trivialement sur le complément de la réunion des composantes irréductibles de G.

La preuve de ceci est analogue à celle de la preuve de l'affirmation 4 de la démonstration du théorème (B).

Finalement, on remarque aisément que les affirmations 1, 2, 3 et 4 entraînent la validité de la proposition (6.1).

Preuve du théorème (A). D'après la proposition précédente, le groupe dérivé $\Gamma' = [\Gamma, \Gamma]$ est contenu dans G^*, et Γ est donc résoluble. Si $s \neq 1$ alors l'ordre de résolubilité de Γ' est au plus égal à $s \leq k$, et ceci entraîne que l'ordre de résolubilité de Γ est au plus $s + 1 \leq k + 1$. Considérons maintenant le cas où $s = 1$. Le problème qui peut se présenter dans ce cas consiste en ce que le groupe G^* peut être métabélien et H^* infini cyclique. Plus précisément, le restriction de G^* à certaines de ses composantes irréductibles peut être conjuguée à l'action d'un groupe non abélien de transformations affines, de sorte que le groupe Γ soit une extension par $(\mathbb{Z}, +)$ d'un produit de groupes conjugués à des groupes de transformations affines dont au moins l'un des facteurs est non abélien. Or, dans ce cas, les arguments de la preuve de l'affirmation 3 dans la démonstration du théorème (A) de [34] montrent que le quotient Γ/G est un groupe résoluble d'ordre de résolubilité égal à 2. Ceci contredit évidemment le fait que Γ/G appartient à SG_1. La preuve du théorème (A) est achevée. □

La description complète des sous-groupes sous-exponentiellement moyennables de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0,1[)$ n'est pas si simple que celle des sous-groupes résolubles. Les exemples ci-dessous de sous-groupes de type fini de $\mathrm{Diff}_+^{\infty}([0,1])$ qui sont sous-exponentiellement moyennables et non résolubles montrent ce fait.

Exemple (6.2). Fixons d'abord deux suites de points (a_i) et (b_i) telles que $a_i < b_i$, $a_0 = 0$, $b_0 = 1$, et telles que pour tout $i \geq 1$ l'intervalle $[a_i, b_i]$ soit contenu dans $]a_{i-1}, b_{i-1}[$. Pour $i \geq 0$ fixons un difféomorphisme $g_i : [a_i, b_i] \to [a_i, b_i]$ de sorte que $g_i(x) > x$ pour tout $x \in]a_i, b_i[$, $g_i(a_{i+1}) = b_{i+1}$, et tel que g_i soit infiniment tangent à l'identité aux extrémités. Étendons g_i à $[0, 1]$ en posant $g_i(x) = x$ pour $x \notin [a_i, b_i]$. Notons $f = g_0$, et définissons $g : [0, 1] \to [0, 1]$ par $g(x) = x$ si $x \in [0, a_1]$ et $g(x) = f^i g_{i+1} f^{-i}$ pour $x \in f^i([a_1, b_1])$, $i \geq 0$. Il est facile de voir que si les suites (a_i) et (b_i) ont été bien choisies (par exemple, si la valeur de $(b_{i+1} - a_{i+1})/(b_i - a_i)$ tend vers zéro à une vitesse hyper-exponentielle), alors g est un difféomorphisme de classe C^∞ de $[0, 1]$ infiniment tangent à l'identité aux extrémités.

Soit Γ le sous-groupe de $\mathrm{Diff}_+^{\infty}([0,1])$ engendré par f et g. Remarquons que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, le sous-groupe de Γ engendré par la famille d'éléments $\{f^{-n} g f^n, \cdots, g, \cdots, f^n g f^{-n}\}$ est résoluble d'ordre de résolubilité égal à $2n+1$. De plus, le sous-groupe G de Γ engendré par la famille $\{f^{-i} g f^i : i \in \mathbb{Z}\}$ est distingué dans Γ, et le quotient Γ/G s'identifie à $(\mathbb{Z}, +)$ (son générateur est fG). Ceci montre bien que Γ est sous-exponentiellement moyennable. D'autre part, Γ n'est pas résoluble, car il contient des sous-groupes résolubles d'ordre de résolubilité arbitrairement grand.

Exemple (6.3). Fixons des points a, b, c, d dans $]0, 1[$ de sorte que $0 < a < c < d < b < 1$. Soit f un difféomorphisme de classe C^∞ de $[a, b]$ infiniment tangent à l'identité aux extrémités et tel que $f(c) = d$. Étendons f en un difféomorphisme de $[0, 1]$ en posant $f(x) = x$ pour $x \notin]a, b[$. Soit g un difféomorphisme de classe C^∞ de $[0, 1]$ infiniment tangent à l'identité aux extrémités, avec un unique point fixe à l'intérieur, et tel que $g(c) = a$ et $g(d) = b$.

Désignons par Γ le sous-groupe de $\mathrm{Diff}_+^\infty([0,1])$ engendré par f et g. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ le sous-groupe Γ_n de Γ engendré par $\{f_i = g^{-i} f g^i : |i| \leq n\}$ est résoluble d'ordre de résolubilité égal à $2n+1$. De plus, le sous-groupe $\mathrm{G} = \cup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$ est distingé dans Γ, et le quotient Γ/G est isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$ (son générateur est $g\mathrm{G}$). Le groupe Γ est donc de type fini, sous-exponentiellement moyennable et non résoluble.

Remarque (6.4). Il n'est pas difficile de modifier les exemples précédents pour ainsi obtenir des sous-groupes de $\mathrm{Afm}_+([0,1])$ vérifiant des propriétés analogues à celles des groupes y construits.

Le plus intéressant des exemples précédents est sans doute le deuxième, car on y voit aparaître de manière claire un phénomène interdit aux groupes résolubles. Plus concrétement, si l'on désigne par $\mathcal{R}(\infty)$ la famille de groupes qui sont des réunions directes de groupes dans $r(i)$, avec $i \in \mathbb{N}$, alors le normalisateur d'un sous-groupe de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0,1[)$ appartenant à $\mathcal{R}(\infty)$ et sans point fixe à l'intérieur de $[0,1]$ n'appartient pas forcément à $\mathcal{R}(\infty)$ (ce fait est à comparer avec le théorème (B)). On peut néanmoins décrire de manière explicite la structure de ce normalisateur dans des cas où la dynamique du groupe en question est relativement simple. Pour cette description nous aurons cependant besoin de quelques notations.

Soit Γ un sous-groupe de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0,1[)$ sans point fixe à l'intérieur qui est une réunion directe d'une famille dénombrable de groupes résolubles. Pour chaque sous-groupe résoluble non trivial G de Γ notons $k(\mathrm{G})$ son ordre de résolubilité. Désignons par $\mathcal{F}$ la famille des sous-intervalles $[u,v]$ de $[0,1]$ qui sont des composantes irréductibles d'au moins l'un des $\mathrm{G}_i^{\mathrm{sol}}$, où $i \in \{1, \cdots, k(\mathrm{G})\}$, et définissons $\hat{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \cup \{[0,1]\}$. Supposons que pour tout $[u,v] \in \mathcal{F}$ il existe un unique intervalle $[\bar{u}, \bar{v}] \in \hat{\mathcal{F}}$ tel que $[u,v] \subset]\bar{u}, \bar{v}[$ et tel qu'il n'existe aucun $[u',v'] \in \mathcal{F}$ vérifiant $[u,v] \subset]u',v'[$ et $[u',v'] \subset]\bar{u},\bar{v}[$ (ce n'est pas toujours le cas : voir l'exemple (6.6) à la fin du paragraphe). La description dynamique des groupes résolubles du chapitre 2 montre dans ce cas qu'il existe $f = f_{[\bar{u},\bar{v}]} \in \Gamma$ tel que $f([\bar{u},\bar{v}]) = [\bar{u},\bar{v}]$, tel que $f(x) < x$ pour tout $x \in]\bar{u},\bar{v}[$, et tel que les intervalles de $\mathcal{F}$ contenus dans $[\bar{u},\bar{v}]$ et qui sont dans l'orbite de $[u,v]$ par Γ sont ceux de la forme $f^n([u,v])$, avec $n \in \mathbb{Z}$. Sur $\mathcal{F}$ considérons la relation d'équivalence $\sim$ qui identifie deux intervalles $[u,v]$ et $[u',v']$ s'il existe deux suites finies $[u_1,v_1], \cdots, [u_n,v_n]$ et $[u_1',v_1'], \cdots, [u_n',v_n']$ dans $\mathcal{F}$ telles que $[u_1,v_1] = [u,v]$, $[u_1',v_1'] = [u',v']$, $[u_n,v_n] = [u_n',v_n']$, $[\bar{u}_i,\bar{v}_i] = [u_{i+1},v_{i+1}]$ et $[\bar{u}'_i, \bar{v}'_i] = [u'_{i+1}, v'_{i+1}]$ pour tout $i \in \{1, \cdots, n-1\}$.

Fixons d'une fois pour toutes une composante irréductible $[a_0,b_0]$ d'un sous-groupe résoluble et non trivial de Γ. Pour $i \geq 1$ définissons par récurrence $[a_{i+1}, b_{i+1}] = [\bar{a}_i, \bar{b}_i]$. Pour $i < 0$ fixons des intervalles $[a_i,b_i]$ de sorte que $[a_i,b_i] = [\bar{a}_{i-1}, \bar{b}_{i-1}]$. Puisque Γ n'a pas de point fixe à l'intérieur, on a $\lim_{i \to +\infty} a_i = 0$ et $\lim_{i \to +\infty} b_i = 1$. Pour chaque $i \in \mathbb{Z}$ notons $\mathcal{F}_i$ la classe d'équivalence de $[u_i,v_i]$ par la relation $\sim$. La famille $\mathcal{F}$ est la réunion disjointe des $\mathcal{F}_i$, $i \in \mathbb{Z}$.

Désignons par $\mathcal{N}(\Gamma)$ le normalisateur de Γ dans $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0,1[)$, et par Γ^* le sous-groupe de $\mathcal{N}(\Gamma)$ constitué des éléments f tels que si $[u,v] \in \mathcal{F}_i$ et $f([u,v]) \in \mathcal{F}_j$, alors $i = j$. Le groupe Γ^* appartient encore à $\mathcal{R}(\infty)$. De plus, il vérifie lui aussi la propriété dynamique supposée pour le groupe Γ. Pour démontrer ces faits on peut utiliser des arguments analogues à ceux de la preuve du théorème (B).

PROPOSITION (6.5). *Le groupe Γ^* est distingué dans $\mathcal{N}(\Gamma)$, et le quotient $\mathcal{N}(\Gamma)/\Gamma^*$ est soit trivial soit isomorphe à $(\mathbb{Z},+)$.*

Preuve. Considérons les familles $\mathcal{F}^*$, $\hat{\mathcal{F}}^*$ et $\mathcal{F}_i^*$ associées au groupe Γ^*, et fixons $g \in \mathcal{N}(\Gamma)$. Si $[u,v]$ appartient à $\mathcal{F}$ alors il existe un sous-groupe résoluble G de Γ tel que $[u,v]$ est une composante irréductible de l'un des $\mathrm{G}_i^{\mathrm{sol}}$, avec $i \in \{1,\cdots,k(\mathrm{G})\}$. Le groupe $g\mathrm{G}g^{-1}$ étant encore résoluble et contenu dans Γ, on déduit par définition que l'intervalle $g([u,v])$ appartient lui aussi à $\mathcal{F}^*$.

Il n'est pas difficile de se convaincre que si $g \in \mathcal{N}(\Gamma)$, si $[u,v] \in \mathcal{F}_i^*$ et si $g([u,v]) \in \mathcal{F}_j^*$, alors la différence $j-i$ ne dépend que de g. On obtient ainsi une application bien définie $\phi : \mathcal{N}(\Gamma) \to (\mathbb{Z},+)$. Cette application est de plus un morphisme de groupes, car si $g,h \in \mathcal{N}(\Gamma)$ et $[u,v] \in \mathcal{F}^*$ satisfont $[u,v] \in \mathcal{F}_i^*$, $g([u,v]) \in \mathcal{F}_j^*$ et $hg([u,v]) \in \mathcal{F}_k^*$, alors $\phi(g) = j-i$, $\phi(h) = k-j$, $\phi(hg) = k-i$, et donc $\phi(hg) = \phi(h)+\phi(g)$. Finalement, le noyau du morphisme ϕ étant par définition égal à Γ^*, ceci finit la preuve de la proposition. $\square$

Malgré la proposition précédente, il faut remarquer qu'en général la dynamique d'un sous-groupe de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0,1[)$ sans point fixe à l'intérieur et appartenant à $\mathcal{R}(\infty)$ peut être plus compliquée que celle qui a été considérée précédemment. Par ailleurs, des phénomènes encore plus compliqués peuvent se produire pour des sous-groupes de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0,1[)$ appartenant à SG_α lorsque α est un ordinal limite «très grand».

Exemple (6.6). Étendons les générateurs f et g du groupe Γ de l'exemple (6.3) en des difféomorphismes de classe C^∞ de $[-1,2]$ comme étant l'identité en dehors de l'intervalle $[0,1]$. Fixons une collection de points $-1 < \bar{a} < \bar{c} < 0 < 1 < \bar{d} < \bar{b} < 2$. Considérons un difféomorphisme $\bar{f}$ de $[\bar{a},\bar{b}]$ infiniment tangent à l'identité aux extrémités et tel que $\bar{f}(\bar{c}) = \bar{d}$. Étendons $\bar{f}$ en un difféomorphisme de classe C^∞ de $[-1,2]$ en posant $\bar{f}(x) = x$ pour $x \in [-1,\bar{a}] \cup [\bar{b},1]$. Fixons un autre difféomorphisme $\bar{g}$ de classe C^∞ de $[-1,2]$ tel que $\bar{g}(x) = x$ pour tout $x \in [0,1]$, $\bar{g}(\bar{c}) = \bar{a}$, $\bar{g}(\bar{d}) = \bar{b}$ et $\bar{g}(x) \neq x$ pour $x \in]-1,0[\cup]1,2[$. Il est facile de voir que le sous-groupe $\bar{\Gamma}$ de $\mathrm{Diff}_+^\infty([-1,2])$ engendré par $f,g,\bar{f}$ et $\bar{g}$ est sous-exponentiellement moyennable. Cependant, son «architecture» est clairement plus compliquée que celle du groupe Γ. Remarquons finalement que $\bar{\Gamma}$ appartient à $\mathcal{R}(\infty)$. En effet, en notant $f_i = g^{-i}fg^i$, $\bar{f}_i = \bar{g}^{-i}\bar{f}\bar{g}^i$, où $i \in \mathbb{Z}$, et en considérant le sous-groupe Γ_n de $\bar{\Gamma}$ engendré par $\{f_i,\bar{f}_j : |i| \leq n, |j| \leq n\}$, on voit aisément que Γ_n est résoluble et appartient à $r(4n+2)$, et que $\bar{\Gamma}$ est la réunion des Γ_n, $n \in \mathbb{N}$.

Signalons cependant que les arguments de la preuve du théorème (B) montrent que si Γ est un sous-groupe sous-exponentiellement moyennable de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0,1[)$ sans point fixe à l'intérieur qui a été obtenu par une extension

$$0 \longrightarrow \mathrm{G} \longrightarrow \Gamma \longrightarrow \mathrm{H} \longrightarrow 0$$

de sorte que G possède des points fixes et $H \in SG_1$, alors H possède un quotient isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$. Plus précisement, si l'on désigne par G^* le sous-groupe de Γ constitué des éléments qui fixent les composantes irréductibles de G, alors on obtient une suite exacte

$$0 \longrightarrow G^* \longrightarrow \Gamma \longrightarrow (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow 0,$$

le morphisme de Γ sur $(\mathbb{Z}, +)$ étant induit par le décalage des composantes irréductibles de G. À partir de ce fait, et en donnant une version générale de la proposition (6.5), il est envisageable de décrire de manière complète la dynamique des sous-groupes sous-exponentiellement moyennables de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0, 1[)$. Une telle description devrait entraîner par exemple que tout sous-groupe sous-exponentiellement moyennable de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0, 1[)$ est en fait élémentairement moyennable. Ce serait une sorte de généralisation de la proposition (5.1) (remarquons que d'après [8], le groupe H considéré au §5 n'est pas élémentairement moyennable). On devrait pouvoir démontrer aussi que si Γ est un sous-groupe de $\mathrm{Diff}_+^{1+\mathrm{vb}}([0, 1[)$ qui est sous-exponentiellement moyennable et non topologiquement conjugué à un sous-groupe du groupe affine, alors son action diagonale sur l'espace $\{(a, b) \in]0, 1[\times]0, 1[: a < b\}$ possède des orbites non partout denses. L'idée consiste en ce que si Γ appartient à SG_α et si $[a, b]$ est une composante irréductible de l'un des sous-groupes de Γ appartenant à SG_β pour $\beta < \alpha$ qui apparaissent dans la construction de Γ en tant que groupe sous-exponentiellement moyennable, alors pour tout $g \in \Gamma$ soit les intervalles $]a, b[$ et $g(]a, b[)$ sont disjoints, soit l'un contient l'autre. On verrait réapparaître ainsi par une méthode dynamique un résultat algébrique déjà connu : le groupe F de Thompson n'est pas sous-exponentiellement moyennable (le lemme 2.1 de [3] permet de montrer que les orbites par F dans l'espace introduit ci-dessus sont denses).

7. Appendice : homéomorphismes affines par morceaux

Considérons le groupe $\mathrm{Afm}_+([0, 1])$ des homéomorphismes directs et affines par morceaux de l'intervalle (par définition, pour chaque $f \in \mathrm{Afm}_+([0, 1])$ le nombre de points de discontinuité de la dérivée de f sur $[0, 1]$ est fini). L'intérêt porté à ce groupe est dû principalement au fait qu'il ne contient pas de sous-groupe libre à deux générateurs (voir [4]), et il est non trivial de déterminer quels sont ses sous-groupes moyennables. Le plus remarquable des sous-groupes de $\mathrm{Afm}_+([0, 1])$ est sans doute le groupe F de Thompson, car il est, parmi d'autres propriétés, de présentation finie (voir [7]).

De manière un peu plus générale, désignons par $\mathrm{Afm}_+([0, 1[)$ le groupe des homéomorphismes directs et affines par morceaux de $[0, 1]$ dont les dérivées n'ont qu'un nombre fini de points de discontinuité sur tout intervalle compact $[0, a]$ contenu dans $[0, 1[$. Bien que si un élément de $\mathrm{Afm}_+([0, 1[)$ n'est pas trivial alors il n'est pas un difféomorphisme, la variation du logarithme de sa dérivée sur tout intervalle compact $[0, a] \subset [0, 1[$ est bien définie et finie. De plus, la dérivée à droite de cet élément est aussi bien définie sur tout point de $[0, 1[$. À partir de ces faits on constate aisément que les résultats de ce travail (ainsi que ceux de [34]) s'étendent aux sous-groupes de $\mathrm{Afm}_+([0, 1[)$. En fait, on peut simplifier énormément les arguments de démonstration dans ce contexte.

Pour cela, il suffit de remarquer que pour tout élément f de $\mathrm{Afm}_+([0,1])$ (resp. de $\mathrm{Afm}_+([0,1[)$), s'il existe une suite de points fixes distincts de f convergeant vers un point de $[0,1]$ (resp. de $[0,1[$), alors tous sauf éventuellement un nombre fini de points de cette suite sont contenus dans un intervalle sur lequel la restriction de f est l'identité.

Il faut néanmoins ajouter une autre propriété : aucun sous-groupe de $\mathrm{Afm}_+([0,1[)$ ne peut être conjugué à un sous-groupe non commutatif du groupe affine. La preuve de ceci est faite par contradiction. Supposons que Γ soit un exemple d'un tel sous-groupe. Choisissons $f \in \Gamma$ avec un seul point fixe sur $]0,1[$, et désignons par p ce point. Il existe $h \in \Gamma$ qui ne fixe pas p. L'élément $g = hfh^{-1}$ possède un unique point fixe sur $]0,1[$, à savoir $h(p)$. Les éléments f et g ne commutent pas, car ses points fixes sont différents. Donc, l'élement $[f,g] = fgf^{-1}g^{-1}$ n'est pas l'identité. Cependant, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $fgf^{-1}g^{-1}(x) = x$ pour tout $x \in [0,\varepsilon]$. Or, ceci est impossible si Γ est conjugué à un sous-groupe du groupe affine.

Désignons par $r'(1) = r''(1)$ la famille de groupes qui sont topologiquement conjugués à des groupes de translations non triviaux, et pour $k \geq 2$ désignons par $r'(k)$ (resp. $r''(k)$) la classe des groupes qui sont des produits semidirects entre $(\mathbb{Z},+)$ et un sous-groupe d'une *somme directe* d'une famille au plus dénombrable (resp. au plus finie) de groupes appartenant aux $r'(i)$ (resp. aux $r''(i)$), avec $i < k$. D'après ce qui précède, tout sous-groupe résoluble de $\mathrm{Afm}_+([0,1[)$ sans point fixe à l'intérieur appartient à $r'(k)$ pour certain $k \in \mathbb{N}$. Le cas des sous-groupes de type fini de $\mathrm{Afm}_+([0,1])$ est un peu plus intéressant.

PROPOSITION (7.1). *Tout sous-groupe résoluble et de type fini de* $\mathrm{Afm}_+([0,1])$ *sans point fixe à l'intérieur et dont l'ordre de résolubilité est égal à k appartient à $r''(k)$.*

Preuve. Nous donnons une démonstration par récurrence. Dans le cas où $k = 1$ on peut appliquer les remarques précédentes. Supposons désormais que l'affirmation de la proposition soit satisfaite pour des indices $i < k$ et fixons un sous-groupe résoluble Γ de $\mathrm{Afm}_+([0,1])$ sans point fixe à l'intérieur et d'ordre de résolubilité égal à k. Par rapport aux notations introduites au §4, on doit démontrer que la que la restriction de $\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*}$ à l'intervalle $[f_k(v_{k-1}), v_{k-1}[$ est de type fini. Pour cela, fixons une famille génératrice $\{g_1, \cdots, g_n\}$ de Γ. Chaque g_i s'exprime sous la forme $f_k^{n_i} h_i$, où h_i appartient à $\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*}$ et $n_i \in \mathbb{Z}$. Puisque chaque h_i appartient à $\mathrm{Afm}_+([0,1])$, il existe un entier positif $N(i)$ tel que si $|n| \geq N(i)$ alors la restriction de $f_k^{-n} h_i f_k^n$ à l'intervalle $[f_k(v_{k-1}), v_{k-1}[$ est l'identité. En posant $N = \max\{N(i) : 1 \leq i \leq n, i \in \mathbb{N}\}$, on voit que la restriction de $\Gamma_{k-1}^{\mathrm{sol},*}$ à $[f_k(v_{k-1}), v_{k-1}[$ est engendrée par les restrictions correspondantes des éléments $f_k^{-n} h_i f_k^n$, où $n \in \mathbb{Z}, |n| \leq N$ et $i \in \{1, \cdots, k\}$. La famille constituée de ces éléments étant finie, ceci achève la démonstration de la proposition. $\square$

La classification complète des groupes groupes sous-exponentiellement moyennables d'homéomorphismes affines par morceaux de l'intervalle devrait être plus simple que celle des groupes de difféomorphismes de classe $\mathrm{C}^{1+\mathrm{vb}}$. De plus, si l'on tient en compte les résultats de [2], il est très probablement vrai (et pas trop difficile à démontrer) que si un sous-groupe de $\mathrm{Afm}_+([0,1])$ ne contient pas de sous-groupe isomorphe à F, alors il est sous-exponentiellement (ou plutôt élémentairement) moyennable.

Received January 08, 2004

Final version received May 19, 2004

UNITÉ DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES
ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON, UMR 5669 DU CNRS
46 ALLÉE D'ITALIE, F-69364 LYON 07
FRANCE
anavas@umpa.ens-lyon.fr

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
LAS PALMERAS 3425
ÑUÑOA, SANTIAGO, CHILE
andnavas@uchile.cl

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. BASS, *The degree of polynomial growth of finitely generated nilpotent groups*, Proc. London Math. Soc. **25** (1972), 603–614.
[2] M. BRIN, *The ubiquity of Thompson's group F in groups of piecewise linear homeomorphisms of the unit interval*, J. London Math. Soc. **60** (1999), 449–460.
[3] M. BRIN, *The chameleon group groups of Richard J. Thompson: automorphisms and dynamics*, Publ. Math. de l'IHES **84** (1996), 5–33.
[4] M. BRIN & C. SQUIER, *Groups of piecewise linear homeomorphisms of the real line*, Invent. Math. **79** (1985), 485–498.
[5] L. BURSLER & A. WILKINSON, Global rigidity of solvable group actions on S^1, Prépublication (2003).
[6] A. CANDEL & L. CONLON, Foliations I, Grad. Stud. in Math. **23** Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
[7] J. CANNON, W. FLOYD & W. PARRY, *Introductory notes on Richard Thompson's groups*, L'Enseignement Mathématique **42** (1996), 215–256.
[8] C. CHOU, *Elementary amenable groups*, Illinois J. Math. **24** (1980), 396–407.
[9] S. COHEN & A. GLASS, *Free groups from fields*, J. London Math. Soc. **55** (1997), 309–319.
[10] A. DYUBINA, *Instability of the virtual solvability and the property of being virtually torsion-free for quasi-isometric groups*, Internat. Math. Res. Notices **21** (2000), 1097–1101.
[11] B. FARB & J. FRANKS, *Groups of homeomorphisms of one-manifolds III: Nilpotent subgroups*, À paraître dans Erg. Theory and Dynamical Systems.
[12] É. GHYS, *Groups acting on the circle*, L'Enseignement Mathématique **47** (2001), 329–407.
[13] É. GHYS. *Sur les groupes engendrés par des difféomorphismes proches de l'identité*, Bol. Soc. Brasileira Mat. **24** (1993), 137–178.
[14] É. GHYS & P. DE LA HARPE, Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov, Progr. Math. **83**, Birkhäuser, Boston 1990.
[15] É. GHYS & V. SERGIESCU, *Sur un groupe remarquable de difféomorphismes du cercle*, Comment. Math. Helvetici **62** (1987), 185–239.
[16] R. GRIGORCHUK, *Degrees of growth of finitely generated groups and the theory of invariant means*, Izv. Akad. Nauka **48** (1984), 939–985.
[17] R. GRIGORCHUK, *On degrees of growth of p-groups and torsion-free groups*, Mat. Sbornik **126** (1985), 194–214.
[18] R. GRIGORCHUK, *An example of a finitely presented amenable group that does not belong to the class* EG, Mat. Sbonnik **189** (1998), 79–100.

[19] R. GRIGORCHUK & A. MAKI, *On a group of intermediate growth that acts on a line by homeomorphisms*, M. Zametki **53** (1993), 46–63. Traduction à l'anglais dans Math. Notes **53** (1993), 146–157.

[20] R. GRIGORCHUK & A. ŻUK, *On a torsion-free weakly branch group defined by a three state automaton*, Int. J. of Algebra and Computation **12** (2002), 223–246.

[21] M. GROMOV, *Groups of polynomial growth and expanding maps*, Publ. Math. de l'IHES **53** (1981), 53–73.

[22] P. DE LA HARPE, Topics in geometric group theory, Univ. of Chicago Press 2000.

[23] P. JOLISSAINT, *Moyennabilité intérieure du groupe* F *de Thompson*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **325** (1997), 61–64.

[24] P. KROPHOLLER, *Amenability and right orderable groups*, Bull. London Math. Soc. **25** (1993), 347–352.

[25] P. LINNELL, *Left ordered groups with no non-abelian free subgroups*, J. Group Theory **4** (2001), 153–168.

[26] P. LONGOBARDI, M. MAJ & A. RHEMTULLA, *When is a right orderable group locally indicable?*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), 637–641.

[27] P. LONGOBARDI, M. MAJ & A. RHEMTULLA, *Groups with no free subsemigroups*, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), 1419–1427.

[28] G. MARGULIS, *Free subgroups of the homeomorphism group of the circle*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **331** (2000), 669–674.

[29] J. MILNOR, *Problem 5603*, American Math. Monthly **75** (1968), 685–686.

[30] J. MILNOR, *Growth of finitely generated solvable groups*, J. Diff. Geometry **2** (1968), 447–449.

[31] J. MILNOR, *A note on curvature and fundamental group*, J. Diff. Geometry **2** (1968), 1–7.

[32] I. NAKAI, *Separatrices for non solvable dynamics on* $\mathbb{C}, 0$, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **44** (1994), 569–599.

[33] A. NAVAS, Groupes de difféomorphismes du cercle. Thèse de doctorat, Lyon (2003).

[34] A. NAVAS, *Groupes résolubles de difféomorphismes de l'intervalle, du cercle et de la droite*, À paraître dans Bull. Brazilian Math. Soc.

[35] A. NAVAS, *Sur les groupes de difféomorphismes du cercle engendrés par des éléments proches des rotations*, À paraître dans L'Enseignement Mathématique.

[36] A. NAVAS, *Actions de groupes de Kazhdan sur le cercle*, Ann. Sci. de l'ENS **35** (2002), 749–758.

[37] A. OLSHANSKII & A. STOROZHEV, *A group variety defined by a semigroup law*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A **60** (1996), 255–259.

[38] D. OSIN, *Elementary classes of groups*, Mat. Zametki **72** (2002), 84-93. Traduction à l'anglais à paraître dans Math. Notes.

[39] J. PLANTE, *Subgroups of continuous groups acting differentiably on the half line*, Ann. de l'Institut Fourier (Grenoble) **34** (1984), 47–56.

[40] J. PLANTE, *Foliations with measure preserving holonomy*, Annals of Maths **102** (1975), 327–361.

[41] J. PLANTE & W. THURSTON, *Polynomial growth in holonomy groups of foliations*, Comment. Math. Helvetici **51** (1976), 567–584.

[42] A. RHEMTULLA & D. ROLFSEL, *Local indicability in ordered groups: braids and elementary amenable groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), 2569–2577.

[43] J. ROSENBLATT, *Invariant measures and growth conditions*, Trans. Amer. Math. Soc. **197** (1974), 33–53.

[44] A. ŠVARC, *A volume invariant of coverings*, Dokl. Akad. Nauka SSSR **105** (1955), 32–34.

[45] W. THURSTON, *A generalization of Reeb stability theorem*, Topology **13** (1974), 347–352.

[46] J. TITS, *Free subgroups in linear groups*, J. Algebra **20** (1972), 250–270.

[47] S. WHITE, *The group generated by* $x \mapsto x+1$ *and* $x \mapsto x^p$ *is free*, J. Algebra **118** (1988), 408–422.

[48] J. WOLF, *Growth of finitely generated solvable groups and curvature of Riemanniann manifolds*, J. Diff. Geometry **2** (1968), 421–446.

[49] J. C. YOCCOZ, *Centralisateurs et conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle. Petits diviseurs en dimension 1*, Astérisque **231** (1995), 89–242.

Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) Vol. 10, 2004

SOME NEW IMMERSIONS AND NONIMMERSIONS OF 2^r-TORSION LENS SPACES

ERRATUM

THOMAS A. SHIMKUS

A repeated error appears in the proofs of theorems (1.1) and (1.5) in [4]. We present one instance of this error and its correction. This corrects one of the two cases of the proof of theorem (1.5) in [4]. The other case has a corresponding correction which appears in section 3 of [2]. The proof of theorem (1.1) in [4] is correctable in an analogous way. Since this theorem is a direct generalization of proposition 3.3(a) [1], it should be noted that the same error appears in the proof of proposition 3.3(a) and that the same correction applies. The author thanks Jesús González for discovering these errors and their correction.

In diagram 5 of [4] it is incorrectly claimed that a particular map $\mu_3' : F \times E_3 \longrightarrow E_3$ exists or, equivalently, that the composite

$$F \times E_3 \xrightarrow{1 \times p_3} F \times E_2 \xrightarrow{\mu_2'} E_2 \xrightarrow{k^2} BK_2 \tag{1}$$

is null-homotopic. The justification given for this latter claim is that both composites

$$F \xrightarrow{\rho} K_1 \longrightarrow E_2 \xrightarrow{k^2} BK_2$$

and

$$E_3 \xrightarrow{p_3} E_2 \xrightarrow{k^2} BK_2$$

are null-homotopic since they factor through the contractible path space PBK_2. This is indeed true, but it does not imply that (1) is null-homotopic. In terms of the Künneth isomorphism, it does imply that the images of k^2_{8m+11} and k^2_{8m+12} in $F \times E_3$ under this composite have no terms of the form $a \otimes 1$ or $1 \otimes b$. However, it does not rule out the existence of terms of the form $c \otimes d$. In fact, it follows from the characterization of k^2_{8m+11} given in [4] that the image of k^2_{8m+11} is such a term and, hence, the claim is false.

This error is corrected by first deleting from section 4 of [4] the material that comes after diagram 4 except for the paragraph that contains diagram 6 and then inserting the following material after the paragraph that contains diagram 6.

Define $\mu_2' : F \times E_2 \to E_2$ to be the composite

$$F \times E_2 \xrightarrow{\rho \times 1} K_1 \times E_2 \xrightarrow{\mu_2} E_2.$$

We then have a commutative diagram

$$
\begin{tikzcd}
K(2,11)\times E_3 \arrow[r] \arrow[d, "j\times 1"'] & K_2\times E_3 \arrow[r, "\mu_3"] \arrow[d, "i\times 1"'] & E_3 \arrow[ddd, "p_3"] \\
K(4,11)\times E_3 \arrow[r] \arrow[d, "1\times p_3"'] \arrow[urr, "\mu_3'"'] & F\times E_3 \arrow[d, "1\times p_3"'] & \\
K(4,11)\times E_2 \arrow[r, "\gamma\times 1"] \arrow[d, "p\times 1"'] & F\times E_2 \arrow[d, "\rho\times 1"'] \arrow[dr, "\mu_2'"] & \\
K(2,11)\times E_2 \arrow[r] & K_1\times E_2 \arrow[r, "\mu_2"] & E_2.
\end{tikzcd}
$$

The map $\mu_3' : K(4,11)\times E_3 \longrightarrow E_3$ exists since the composite

$$K(4,11)\times E_3 \xrightarrow{\quad \gamma\times p_3 \quad} F\times E_2 \xrightarrow{\quad \mu_2' \quad} E_2 \xrightarrow{\quad k^2 \quad} BK_2$$

is null-homotopic. This depends upon the observation that $K(4,11)$ is $(8m+10)$-connected whereas E_3 is simply connected and, hence, the images of k^2_{8m+11} and k^2_{8m+12} in $K(4,11)\times E_3$ under this composite can only have the form $a\otimes 1+1\otimes b$. However, both composites

$$K(4,11)\xrightarrow{\gamma} F\xrightarrow{\rho} K_1\longrightarrow E_2\xrightarrow{k^2} BK_2$$

and

$$E_3\xrightarrow{p_3} E_2\xrightarrow{k^2} BK_2$$

are null-homotopic since they factor through the contractible path space PBK_2, and, hence, by the Künneth isomorphism, the images of k^2_{8m+11} and k^2_{8m+12} in $K(4,11)\times E_3$ have no terms of the form $a\otimes 1$ or $1\otimes b$.

Note that the composite $\mu_2'((\gamma\alpha)\times l_2) : L^{2n+1}(4)\longrightarrow E_2$ equals our map $l_2' : L^{2n+1}(4)\longrightarrow E_2$, since $\rho\gamma\alpha=\alpha_2$. Thus, $\mu_2'((\gamma\alpha)\times l_2)$ lifts to a map $L^{2n+1}(4)\longrightarrow E_3$. In fact, $\mu_2'((\gamma\alpha)\times l_2)$ lifts to $\mu_3'(\alpha\times l_3)$ since

$$
\begin{aligned}
p_3\mu_3'(\alpha\times l_3) &= \mu_2'(\gamma\times p_3)(\alpha\times l_3)\\
&= \mu_2'((\gamma\alpha)\times l_2).
\end{aligned}
$$

Moreover, the lifting $\mu_3'(\alpha\times l_3)$ is such that

$$
\begin{aligned}
(\alpha\times l_3)^*(\mu_3')^*(k^3_{8m+12}) &= (\alpha\times l_3)^*(1\otimes k^3_{8m+12}+(j^*)^{-1}(Sq^1\iota_{8m+11})\otimes 1)\\
&= l_3^*(k^3_{8m+12})+\alpha^*((j^*)^{-1}(Sq^1\iota_{8m+11}))\\
&= l_3^*(k^3_{8m+12})+\alpha^*(d_2(p^*(\iota_{8m+11}))),\ \text{see [3, Ch. 11, Thm. 1]}\\
&= l_3^*(k^3_{8m+12})+d_2(\alpha^*p^*(\iota_{8m+11}))\\
&= l_3^*(k^3_{8m+12})+d_2(xy^{4m+5})\\
&= y^{4m+6}+y^{4m+6}=0.
\end{aligned}
$$

Hence, $((2^L - n - 1)H)\pi$ lifts to E_4 and, thus, to $\widetilde{BU}(2n-5)$.

Received July 21, 2004

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
UNIVERSITY OF SCRANTON
SCRANTON, PA 18510
USA
shimkust2@scranton.edu

REFERENCES

[1] L. ASTEY, D. M. DAVIS, AND J. GONZÁLEZ, *Generalized axial maps and Euclidean immersions of lens spaces*, Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) **9**, (2003), 151–163.
[2] J. GONZÁLEZ, AND T. A. SHIMKUS, *On the immersion problem for 2^r-torsion lens spaces*, Topology Appl. **145** (1-3), (2004), 261–275.
[3] R. E. MOSHER AND M. C. TANGORA, Cohomology Operations and Applications in Homotopy Theory, Harper and Row, New York, 1968.
[4] T. A. SHIMKUS, *Some new immersions and nonimmersions of 2^r-torsion lens spaces*, Bol. Soc. Mat. Mex. (3) **9**, (2003), 339–357.

ERRATA

En el Vol. 10, No. 1 (abril de 2004) aparecieron errores de impresión en la segunda y tercera de forros así como en la penúltima página impresa.

El número actual contiene la información corregida de las direcciones electrónicas de los editores generales y la lista de los miembros del Consejo Editorial, así como los formatos de los archivos electrónicos a ser enviados por los autores.

En el Vol. 9, No. 1 (abril de 2003), pag. 163, deben agregarse las dos siguientes referencias bibliográficas:

Some printing errors appeared in Vol. 10, No. 1 (April, 2004) on the inside front cover, the inside back cover, and the next to last printed interior page.

The current issue provides corrected information regarding the email addresses of the Managing Editors and the names of the members of the Editorial Board as well as the electronic formats to be sent by authors.

In Vol. 9, No. 1 (April, 2003), page 163, the following two references should be added:

[1] J. ADEM, S. GITLER, AND I. M. JAMES. *On axial maps of a certain type*, Bol. Soc. Mat. Mexicana (2), **17**, (1972), 59–62.

[2] M. F. ATIYAH, K-theory, W. A. Benjamin, Inc., New York, 1967.